Introducción a los Elementos del Álgebra

Por

Leonhard Euler

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE
Título original: *Elements of Algebra*
© De la traducción: Emilio Méndez Pinto
Primera edición: Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co., 1822
D. R. © Longman, Hurst, Rees, Orme, & Co., 1822
Prohibida su reproducción por cualquier medio mecánico o eléctrico sin la autorización por escrito de los coeditores.

SECCIÓN I

DE LOS DISTINTOS MÉTODOS PARA CALCULAR CANTIDADES SIMPLES

CAPÍTULO I

DE LAS MATEMÁTICAS EN GENERAL

ARTÍCULO I

1. A todo lo que es capaz de aumentar o disminuir se le llama *magnitud* o *cantidad*.

Una suma de dinero es, por lo tanto, una cantidad, porque podemos aumentarla y disminuirla. Lo mismo sucede con un peso y con otras cosas de esta naturaleza.

2. De esta definición es evidente que los diversos tipos de magnitud deben ser tantos que es difícil incluso enumerarlos, y este es el origen de las distintas ramas de las matemáticas, cada una siendo empleada sobre un tipo particular de magnitud. Las matemáticas, en general, son la *ciencia de la cantidad*, o la ciencia que investiga los medios para medir la cantidad.

3. Ahora bien, no podemos medir o determinar ninguna cantidad a menos que consideremos alguna otra cantidad del mismo tipo como es conocido, y señalar su relación mutua. Si se propusiera, por ejemplo, determinar la cantidad de una suma de dinero, debemos tomar alguna pieza de dinero conocida (como un Luis de oro, una corona, un ducado, o alguna otra moneda) y mostrar cuántas de estas piezas están contenidas en la suma dada. De la misma forma, si se propusiera determinar la cantidad de un peso, debemos tomar un cierto peso conocido, por ejemplo, una libra, una onza, etc., y después mostrar cuántas veces uno de estos pesos está contenido en aquello que intentamos determinar. Si quisiésemos medir cualquier longitud o extensión, debemos hacer uso de alguna longitud conocida, como un metro.

4. Así que la determinación, o la medición de la magnitud de todos los tipos, se reduce a esto: fíjese a placer, sobre cualquier magnitud conocida de la misma especie, aquello con lo que estará determinada, y considérese como la *medida* o *unidad*; después, determínese la proporción de la magnitud propuesta con esta magnitud conocida. Esta proporción siempre se expresa con números, de tal manera que un número no es nada más

que la proporción de una magnitud con otra [magnitud] asumida arbitrariamente como la unidad.

5. De esto se desprende que todas las magnitudes pueden ser expresadas con números, y que el fundamento de todas las ciencias matemáticas debe establecerse en un tratado completo sobre la ciencia de los números y en un examen preciso de los distintos métodos de cálculo posibles. A esta parte fundamental de las matemáticas se le llama análisis o álgebra.

6. En el álgebra, pues, consideramos únicamente números que representan cantidades sin tomar en cuenta los distintos tipos de cantidad. Éstos son el objeto de otras ramas de las matemáticas.

7. La aritmética trata de los números en particular, y es la *ciencia de los números* propiamente dichos. Pero esta ciencia sólo se extiende a ciertos métodos del cálculo que tienen lugar en la práctica común. El álgebra, por el contrario, comprende, en general, todos los casos que pueden existir en la doctrina y cálculo de los números.

CAPÍTULO II

EXPLICACIÓN DE LOS SIGNOS MÁS (+) Y MENOS (-)

8. Cuando tenemos que añadir un número dado a otro, lo indicamos con el signo +, que ponemos antes del segundo número y se lee como *más*. Así, $5+3$ significa que debemos añadir 3 al número 5, y todo mundo sabe que el resultado es 8. De igual forma, $12+7$ hacen 19, $25+16$ hacen 41, la suma de $25+41$ es 66, etc.

9. También hacemos uso del mismo signo + (*más*) para conectar varios números; por ejemplo, $7+5+9$ significa que al número 7 debemos añadir 5 y también 9, lo que hace 21. El lector comprenderá qué se quiere decir con

$$8+5+13+11+1+3+10,$$

a saber, la suma de todos estos números, que es 51.

10. Todo esto es evidente, y sólo tenemos que mencionar que, en el álgebra, para poder generalizar números, los representamos con letras como *a*, *b*, *c*, *d*, etc. Así, la expresión $a+b$ significa la suma de dos números que expresamos con *a* y *b*, y estos números pueden ser muy grandes o muy pequeños. De igual manera, $f+m+b+x$

significa la suma de los números representados por estas cuatro letras. Por consiguiente, si conocemos los números representados por las letras, en todo momento seremos capaces de encontrar, por medio de la aritmética, la suma o valor de expresiones similares.

11. Por otra parte, cuando requerimos sustraer un número dado de otro, denotamos a esta operación con -, que significa *menos*, y lo ponemos antes del número a ser sustraído. Así, $8-5$ significa que debemos quitar el número 5 de 8; habiéndolo hecho, queda 3. Igualmente, $12-7$ es lo mismo que 5, $20-14$ es lo mismo que 6, etc.

12. A veces podemos tener varios números a sustraer de uno solo, como, por ejemplo, $50-1-3-5-7-9$. Esto significa, primero, quitar 1 de 50, y queda 49; tomar 3 de ese resto, entonces quedará 46; quitar 5, queda 41; quitar 7, queda 34; por último, quitar 9 de eso, y queda 25. Este último resto es el valor de la expresión. Pero como han de ser sustraídos todos los números 1, 3, 5, 7, 9, es lo mismo si sustraemos su suma, que es 25, de una vez de 50, y el resto será 25 igual que antes.

13. También es muy sencillo determinar el valor de expresiones similares en donde aparecen los dos signos + (*más*) y - (*menos*). Por ejemplo:

$$12-3-5+2-1 \text{ es lo mismo que } 5.$$

Simplemente tenemos que reunir por separado la suma de los números que tienen el signo + antes que ellos y sustraer de ésta la suma de aquellos que tienen el signo -. La suma de 12 y 2 es 14; la de 3, 5 y 1 es 9, y quitando 9 de 14 queda 5.

14. De estos ejemplos puede percibirse que *el orden en el que escribimos los números es indiferente y arbitrario siempre que se preserve el signo apropiado para cada uno*. Con igual decoro, pudimos haber arreglado esta expresión así: $12+2-5-3-1$, o $2-1-3-5+12$, o $2+12-3-1-5$, o aún en órdenes distintas. Debe observarse que en la expresión propuesta el signo + está supuesto a estar antes que el número 12.

15. No supondrá más dificultades si, para generalizar estas operaciones, hacemos uso de letras en lugar de números reales. Es claro, por ejemplo, que

$$a-b-c+d-e$$

significa que tenemos números expresados por *a* y *d*, y que de estos números, o de su suma, debemos extraer los números expresados por *b*, *c*, *e*, que tienen antes de ellos el signo -.

16. Por lo tanto, es absolutamente necesario considerar qué signo se antepone a cada número, porque *en el álgebra las cantidades simples son números considerados con*

respecto a los signos que los preceden o los afectan. Además, llamamos *cantidades positivas* a aquellas antecedidas por el signo +, y *cantidades negativas* a las afectadas por el signo -.

17. La manera en que por lo general calculamos la propiedad de una persona es un buen ejemplo de lo que se ha dicho. Denotamos lo que un hombre realmente posee con números positivos, utilizando o comprendiendo el signo +, mientras que sus deudas están representadas con números negativos o utilizando el signo -. Así, cuando de cualquiera se dice que tiene 100 coronas pero que debe 50, esto significa que en realidad su propiedad asciende a $100-50$ (o, a lo que es la misma cosa, $+100-50$, esto es, 50).

18. Como podemos considerar los números negativos como deudas porque los números positivos representan posesiones reales, podemos decir que los números negativos son menos que nada. Ahora obtenemos los números positivos añadiendo 1 a 0, esto es, a nada, y continuando siempre así para incrementar desde la unidad. Este es el origen de la serie de los números llamados *números naturales*, siendo los siguientes los términos principales de la serie

$$0,+1,+2,+3,+4,+5,+6,+7,+8,+9,+10\,,$$

y así hasta el infinito.

Pero si en lugar de continuar esta serie por adiciones sucesivas la continuamos en la dirección opuesta al sustraer la unidad perpetuamente, tendremos la serie de números negativos:

$$0,-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9,-10\,,$$

y así hasta el infinito.

20. Todos estos números, ya sean positivos o negativos, tienen la conocida denominación de *números enteros*, que consecuentemente son o mayores o menores que nada. Los llamamos *enteros* para distinguirlos de las fracciones y de otros tipos de números de los que hablaremos más adelante. Por ejemplo, al ser 50 mayor que 49 por una unidad entera, es fácil ver que entre 49 y 50 puede haber una infinidad de números intermedios, todos mayores que 49 y menores que 50. Sólo tenemos que imaginar dos líneas, una de 50 metros de largo y otra de 49, para que sea evidente que podemos trazar un número infinito de líneas todas mayores a 49 metros y menores a 50.

21. Para los propósitos del álgebra, es muy importante formarse una idea precisa de las cantidades negativas sobre las que hemos estado hablando. Me contentaré con hacer observar aquí que todas las expresiones del tipo

$$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4, \text{ etc.},$$

son iguales a 0 o a nada, y que

$$+2-5 \text{ es igual a } -3.$$

Esto es porque si una persona tiene 2 coronas y debe 5, no sólo no tiene nada, sino que aún debe 3 coronas. De igual forma

$$7-12 \text{ es igual a } -5 \text{ y } 25-40 \text{ es igual a } -15.$$

22. Las mismas observaciones se sostienen cuando, para generalizar la expresión, utilizamos letras en lugar de números: 0 (o nada) siempre será el valor de $+a-a$. Si quisiésemos conocer el valor de $+a-a$ debemos considerar dos casos.

El primero es cuando *a* es mayor que *b*; entonces debemos sustraer *b* de *a*, y el resto (antes del cual se pone o se entiende el signo +) muestra el valor buscado.

El segundo caso es cuando *a* es menor que *b*; aquí debemos sustraer *a* de *b*, y el resto, siendo negativo al poner antes que él el signo -, será el valor buscado.

CAPÍTULO III

DE LA MULTIPLICACIÓN DE CANTIDADES SIMPLES

23. Cuando hay dos o más números iguales a ser añadidos, la expresión de su suma puede ser abreviada. Por ejemplo,

$a+a$ es lo mismo que $2\times a$,

$a+a+a$ $3\times a$,

$a+a+a+a$ $4\times a$, y así sucesivamente, donde $\times$ es el signo de la multiplicación. De esta manera podemos formar una idea de la multiplicación, y debe observarse que

$2\times a$ significa 2 veces *a*,

$3\times a$ 3 veces *a*,

$4\times a$ 4 veces *a*, etc.

24. *Si, por lo tanto, un número expresado por una letra ha de ser multiplicado por cualquier otro número, simplemente ponemos ese número antes de la letra*, así

a multiplicado por 20 se expresa como $20a$, y

b multiplicado por 30 $30b$, etc.

También es evidente que *c* tomada una vez, o $1c$, es simplemente *c*.

25. Además, es extremadamente fácil multiplicar estos productos por otros números; por ejemplo:

2 veces $3a$ hace $6a$,

3 veces $4b$ hace $12b$,

5 veces $7x$ hace $35x$,

y estos productos pueden, a su vez, multiplicarse por otros números a placer.

26. *Cuando el número por el cual habremos de multiplicar también está representado por una letra, lo ponemos inmediatamente antes de la otra letra*; así, al multiplicar *b* por *a*, el producto se escribe como *ab*, y *pq* será el producto de la multiplicación del número *q* por *p*. Si multiplicamos otra vez este *pq* por *a*, obtendremos *apq*.

27. Aquí ha de observarse que *el orden en el cual unimos las letras es indiferente*; que *ab* es la misma cosa que *ba*, porque *b* multiplicado por *a* produce tanto como *a* multiplicado por *b*. Para comprender esto, únicamente tenemos que sustituir por *a* y *b* números conocidos como 3 y 4, y la verdad será evidente porque 3 veces 4 es lo mismo que 4 veces 3.

28. No será difícil percibir que cuando uno tiene que poner números en lugar de letras unidas, tal como lo hemos descrito, aquellos no pueden escribirse de la misma manera poniéndolos juntos uno después de otro, porque si fuésemos a escribir 34 para 3 veces 4, tendríamos 34 y no 12. Por consiguiente, cuando requerimos multiplicar números comunes, debemos separarlos por el signo $\times$ o por puntos. Así, 3×4, o $3\cdot 4$, significa 3 veces 4, esto es, 12. Por lo tanto, 1×2 es igual a 2, y $1\times 2\times 3$ hace 6. Igualmente $1\times 2\times 3\times 4\times 56$ hace 1344, y $1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10$ es igual a 3628800, etc.

29. De la misma manera, podemos descubrir el valor de una expresión de esta forma: $5\cdot 7\cdot 8\cdot abcd$. Ésta muestra que 5 ha de ser multiplicado por 7, y que este producto debe de nuevo multiplicarse por 8, y que después debemos multiplicar este producto de los

tres números por *a*, después por *b*, después por *c*, y por último por *d*. También debemos observar que en lugar de $5 \times 7 \times 8$ podemos escribir su valor, 280, porque obtenemos este número cuando multiplicamos el producto de 5 por 7, o 35, por 8.

30. A los resultados que surgen de la multiplicación de dos o más números se les llama *productos*, y a los números o letras individuales se les llama *factores*.

31. Hasta ahora sólo hemos considerado números positivos, y no puede haber duda de que los productos que hemos visto surgir son también positivos: $+a$ por $+b$ necesariamente debe dar $+ab$. Pero debemos examinar por separado lo que produce la multiplicación de $+a$ por $-b$ y de $-a$ por $-b$.

32. Comencemos por multiplicar $-a$ por 3 (o $+3$). Ahora, como podemos considerar $-a$ como una deuda, es claro que si tomamos esa deuda tres veces deberá hacerse tres veces más grande, y consecuentemente el producto requerido es $-3a$. Así que si multiplicamos $-a$ por $+b$ obtendremos $-ba$ o, lo que es la misma cosa, $-ab$. De esto concluimos que si se multiplica una cantidad positiva por una negativa, el producto será negativo, y establecemos como regla que + por + hace +, o *más*, y que, por el contrario, + por - o - por + hace -, o *menos*.

33. Queda por resolver el caso en donde multiplicamos - por - o, por ejemplo, $-a$ por $-b$. A primera vista es evidente que, con respecto a las letras, el producto será *ab*, pero queda la duda de si debemos poner el signo + o el signo - antes del producto. Todo lo que sabemos es que debe ser uno u otro de estos signos. Ahora, digo que no puede ser el signo - porque $-a$ por $+b$ da $-ab$, y $-a$ por $-b$ no puede producir el mismo resultado que $-a$ por $+b$, sino que debe producir un resultado contrario, esto es, $+ab$. Consecuentemente, tenemos la siguiente regla: - multiplicado por - produce + de la misma manera que + multiplicado por + [produce +].

34. Podemos expresar las reglas expresadas más brevemente como sigue:

Signos iguales multiplicados juntos dan +; signos desiguales o contrarios dan -. Así, cuando tenemos que multiplicar los números $+a, -b, -c, +d$, primero tenemos $+a$ multiplicado por $-b$, lo que da $-ab$; esto por $-c$ da $+abc$, y esto por $+d$ da $+abcd$.

35. Una vez eliminadas las dificultades relativas a los signos, sólo nos queda mostrar cómo multiplicar números que son, por sí mismos, productos. Si, por ejemplo, hubiésemos de multiplicar el número *ab* por el número *cd*, el producto sería *abcd*, y se

obtiene al multiplicar primero *ab* por *c* y después el resultado de tal multiplicación por *d*. O, si tuviésemos que multiplicar 36 por 12, como 12 es igual a 3 veces 4, sólo debemos multiplicar 36, primero por 3, y después el producto, 108, por 4, para tener el producto total de la multiplicación de 12 por 36, que es, pues, 432.

36. Pero si quisiésemos multiplicar $5ab$ por $3cd$ podríamos escribir $3cd \times 5ab$. Sin embargo, como en este ejemplo el orden de los números ha ser multiplicados es indiferente, será más conveniente, como suele hacerse, poner los números comunes antes que las letras y expresar el producto así: $5 \times 3abcd$, o $15abcd$, porque 5 veces 3 es 15.

Así que si multiplicamos $12pqr$ por $7xy$ obtendremos $12 \times 7pqrxy$, o $84pqrxy$.

CAPÍTULO IV

DE LA NATURALEZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS CON RESPECTO A SUS FACTORES

37. Hemos visto que un producto se genera por la multiplicación de dos o más números y que a éstos se les llama *factores*. Así, los números *a*, *b*, *c*, *d* son los factores del producto *abcd*.

38. Por lo tanto, si consideramos todos los números enteros como productos de dos o más números multiplicados, pronto encontraremos que algunos no pueden resultar de tal multiplicación, y que consecuentemente no tienen factores; mientras que otros pueden ser los productos de dos o más [números] multiplicados, y que consecuentemente tienen dos o más factores. De esta forma, 4 es producido por 2×2, 6 por 2×3, 8 por $2 \times 2 \times 2$, 27 por $3 \times 3 \times 3$, 10 por 2×5, etc.

39. Por otro lado, los números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., no pueden ser representados de la misma manera por factores, a menos que para tal propósito recurramos a la unidad y representemos 2, por ejemplo, como 1×2. Pero en los números que son multiplicados por 1 y permanecen iguales no es apropiado reconocer la unidad como un factor.

Es así que a todos los números como 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc., que no pueden ser representados por factores, se les llama [*números*] *simples* o *números primos*, mientras que

a otros como 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc., que pueden ser representados por factores, se les llama *números compuestos*.

40. Los *números simples* o *primos* requieren una atención especial, porque no resultan de la multiplicación de dos o más números. Es particularmente digno de observar que si escribimos estos números en sucesión a medida que se siguen unos de otros, así:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc.,

no podemos rastrear un orden regular; sus incrementos a veces son más grandes, a veces menos, y hasta ahora nadie ha podido descubrir si siguen una cierta ley o no.

41. *Todos los números compuestos, que pueden ser representados por factores, resultan de los números primos ya mencionados; esto es, todos sus factores son números primos*. Si encontramos un factor que no sea un número primo, siempre puede ser descompuesto y representado por dos o más números primos. Cuando hemos representado al número 30, por ejemplo, como 5×6, es evidente que 6 no es un número primo, pero al estar producido por 2×3, podemos representar 30 por $5\times 2\times 3$ o por $2\times 3\times 5$; es decir, por factores que son todos números primos.

42. Si ahora consideramos aquellos números compuestos que se pueden resolver en números primos, notaremos una gran diferencia entre ellos; encontraremos que algunos sólo tienen dos factores, que otros tienen tres, y que otros un número aún mayor. Ya hemos visto, por ejemplo, que

4 es lo mismo que 2×2,
6 2×3,
8 $2\times 2\times 2$,
9 3×3,
10 2×5,
12 $2\times 3\times 2$,
14 2×7,
15 3×5,
16 $2\times 2\times 2\times 2$, y así sucesivamente.

43. Por consiguiente, es fácil encontrar un método para analizar o resolver cualquier número en sus factores simples. Propongamos el número 360, por ejemplo. Primero lo representaremos por 2×180. Ahora bien, 180 es igual a 2×90, y

90} es lo mismo que $\{2\times 45$,

45} $\{3\times 15$, y por último

15} $\{3\times 5$.

Así que el número 360 puede ser representado por estos factores simples: $2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 5$, ya que todos estos números multiplicados producen 360.

44. Esto muestra que los números primos no pueden ser divididos entre otros números y, por otra parte, que *los factores simples de los números compuestos se encuentran, más conveniente y certeramente, al buscar los números simples o primos entre los cuales son divisibles tales números compuestos*. Pero para esto es necesaria la *división*, así que en el siguiente capítulo explicaremos las reglas de tal operación.

CAPÍTULO V

DE LA DIVISIÓN DE CANTIDADES SIMPLES

45. Cuando un número ha de ser separado en dos, en tres, o en más partes iguales, se hace por medio de la *división*, que nos permite determinar la magnitud de una de tales partes. Cuando queremos, por ejemplo, separar el número 12 en tres partes iguales descubrimos, por medio de la división, que cada una de tales partes es igual a 4.

En esta operación se hace uso de los siguientes términos. Al número a ser descompuesto o dividido se le llamada *dividendo*; al número de partes iguales buscado se le llama *divisor*, y a la magnitud de una de tales partes, determinada por la división, se le llama *cociente*. Así, en el ejemplo de arriba:

12 es el dividendo,

3 es el divisor, y

4 es el cociente.

46. De esto se sigue que si dividimos un número entre 2, o en dos partes iguales, una de tales partes, o el cociente, tomada dos veces produce exactamente el número propuesto. De la misma manera, si tenemos un número a ser dividido entre 3, el cociente tomado tres veces debe dar el mismo número otra vez. Por lo general, *la multiplicación del cociente por el divisor siempre reproduce el dividendo*.

47. Es por esto que de la división se dice que es una regla que nos enseña a encontrar un número o cociente que, al ser multiplicado por el divisor, producirá exactamente el dividendo. Por ejemplo, si 35 ha de ser dividido entre 5, buscamos un número que multiplicado por 5 produzca 35. Este número es 7, porque 5 veces 7 es 35. La forma de expresión empleada en este razonamiento es: 5 en 35, 7 veces; y 5 veces 7 hace 35.

48. El dividendo, por lo tanto, puede ser considerado como un producto del cual uno de los factores es el divisor y el otro el cociente. Así, suponiendo que tenemos 63 a ser dividido entre 7, tratamos de encontrar un producto tal que, tomando 7 por uno de sus factores, el otro factor multiplicado por éste dé exactamente 63. 7×9 es tal producto, y consecuentemente 9 es el cociente obtenido cuando dividimos 63 entre 7.

49. Por lo general, si tenemos que dividir un número *ab* entre *a*, es evidente que el cociente será *b*, porque *a* multiplicado por *b* da el dividendo *ab*. También es claro que si tenemos que dividir *ab* entre *b* el cociente será *a*. Y en todos los ejemplos de la división podemos proponer que si dividimos el dividendo entre el cociente obtendremos el divisor, porque como 24 dividido entre 4 da 6, 24 dividido entre 6 dará 4.

50. Como *toda la operación consiste en representar el dividendo por dos factores, de los cuales uno puede ser igual al divisor y el otro al cociente*, los siguientes ejemplos serán fácilmente comprendidos. En primer lugar, digo que el dividendo *abc*, dividido entre *a*, da *bc*, porque *a* multiplicado por *bc* produce *abc*; de igual forma *abc* dividido entre *b* da *ac*, y *abc* dividido entre *ac* da *b*. También digo que 12*mn* dividido entre 3*m* da 4*n*, porque 3*m* multiplicado por 4*n* da 12*mn*. Pero si el mismo número 12*mn* hubiese sido dividido entre 12, habríamos obtenido el cociente *mn*.

51. Como todo número *a* puede ser expresado por 1*a* o *un a*, es evidente que si tuviésemos que dividir *a* o 1*a* entre 1, el cociente sería el mismo número *a*. Pero, por el contrario, si el mismo número *a* o 1*a* ha de ser dividido entre *a*, el cociente será 1.

52. A menudo sucede que no podemos representar el dividendo como el producto de dos factores de los cuales uno es igual al divisor, y entonces la división no puede ser llevada a cabo de la manera descrita.

Cuando tenemos, por ejemplo, 24 a ser dividido entre 7, es obvio a primera vista que el número 7 no es un factor de 24, porque el producto de 7×3 es sólo 21, y

consecuentemente muy pequeño, y 7×4 hace 28, que es mayor que 24. De esto, sin embargo, descubrimos que el cociente debe ser mayor que 3 y menor que 4. Para poder determinarlo de manera exacta empleamos otra especie de números llamados *fracciones*, que consideraremos en uno de los siguientes capítulos.

53. Hasta que consideremos el uso de las fracciones, es habitual quedarse satisfecho con el número entero que más se acerca al cociente verdadero, pero prestando atención al mismo tiempo al *residuo* que queda. Así, decimos que 7 en 24 son 3 veces, y el residuo es 3 porque 3 veces 7 produce sólo 21, que es 3 menos que 24. De igual forma podemos considerar los siguientes ejemplos:

6) 34 (5
30
4

Esto es, el divisor es 6, el dividendo 34, el cociente 5, y el residuo 4.

9) 41 (4
36
5

Aquí el divisor es 9, el dividendo 41, el cociente 4, y el residuo 5.

La siguiente regla ha de observarse en los ejemplos en donde haya un residuo.

54. *Si multiplicamos el divisor por el cociente, y añadimos el residuo a este producto, obtendremos el dividendo*. Este es el método de probar la división y de descubrir si el cálculo es correcto o no. De esta forma, en el primero de los dos ejemplos anteriores, si multiplicamos 6 por 5 y añadimos el residuo 4 al producto 30 obtendremos 34 o el dividendo. Y en el segundo ejemplo, si multiplicamos el divisor 9 por el cociente 4 y añadimos el residuo 5 al producto 36 obtendremos el dividiendo 41.

55. Por último, es necesario remarcar que, con respecto a los signos + *más* y - *menos*, si dividimos $+ab$ entre $+a$, el cociente será, evidentemente, $+b$. Pero si dividimos $+ab$ entre $-a$ el cociente será $-b$, porque $-a \times -b$ da $+ab$. Si el dividendo es $-ab$ y ha de ser dividido entre el divisor $+a$, el cociente será $-b$, porque $-b$ multiplicado por $+a$ da $-ab$. Por último, si tenemos que dividir el dividendo $-ab$ entre el divisor $-a$, el cociente será $+b$, porque el dividendo $-ab$ es el producto de $-a$ por $+b$.

56. *Por lo tanto, con respecto a los signos + y -, la división admite las mismas reglas que hemos visto aplicadas en la multiplicación*, a saber:

+ por + requiere +; + por - requiere -;

- por + requiere -; - por - requiere +.

En pocas palabras, *signos iguales dan más, signos desiguales dan menos*.

57. Así, cuando dividimos $18pq$ entre $-3p$, el cociente es $-6q$. Más lejos:

$-30xy$ dividido entre $+6y$ da $-5x$, y

$-54abc$ dividido entre $-9b$ da $+6ac$,

porque en este último ejemplo -9 multiplicado por $+6ac$ hace $-6\times 9abc$, o $-54abc$. Ya hemos dicho lo suficiente sobre la división de cantidades simples, así que nos apresuraremos a la explicación de las fracciones después de hacer unas cuantas observaciones sobre la naturaleza de los números con respecto a sus divisores.

CAPÍTULO VI

DE LAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS CON RESPECTO A SUS DIVISORES

58. Ya hemos visto que algunos números son divisibles entre ciertos divisores y que otros no lo son, y para poder obtener un conocimiento más particular de los números debemos observar cuidadosamente esta diferencia, tanto al distinguir los números divisibles entre divisores de los que no lo son, como al considerar el residuo que queda en la división de los últimos. Para este propósito examinemos los divisores:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc.

59. Primero, sea 2 el divisor; los números divisibles por él son 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, etc., que, al parecer, se incrementan siempre por 2. Estos números, en la medida en que se puede continuar, son llamados *números pares*. Pero hay otros números, a saber,

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, etc.,

que son uniformemente menores o mayores que los primeros por una unidad, y que no pueden ser divididos entre 2 sin el residuo 1; a estos números se les llama *números nones*.

Todos los números pares están comprendidos en la expresión general $2a$, porque todos se obtienen al sustituir sucesivamente por a los enteros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc., y de

aquí se sigue que todos los números nones están comprendidos en la expresión $2a+1$, porque es mayor por una unidad que el número par $2a$.

60. Segundo, sea 3 el divisor. Los números divisibles por él son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, etc., y estos números pueden representarse por la expresión $3a$, porque $3a$ dividido entre 3 da el cociente a sin ningún residuo. Todos los otros números a dividirse entre 3 darán 1 o 2 como residuo, y son consecuentemente de dos tipos. Aquellos que después de la división dejan 1 como residuo son:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, etc.

Estos números están contenidos en la expresión $3a+1$. El otro tipo, en donde queda 2 como residuo, es

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, etc.

Estos números pueden ser expresados generalmente por $3a+2$, de tal forma que todos los números pueden ser expresados por $3a$, o por $3a+1$, o por $3a+2$.

61. Ahora supongamos que 4 es el divisor; los números que divide son

4, 8, 12, 16, 20, 24, etc.

Estos números aumentan uniformemente por 4, y están comprendidos en la expresión $4a$. Todos los otros números, esto es, aquellos que no son divisibles entre 4, pueden dejar 1 como residuo o ser mayores que los [números] anteriores por 1, como en:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, etc.

Consecuentemente, están comprendidos en la expresión $4a+1$. También pueden dejar 2 como residuo, como en

2, 6, 10, 14, 16, 18, 22, 26, etc.

Éstos estarán expresados por $4a+2$. O, por último, pueden dejar 3 como residuo, como en

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, etc.

Éstos estarán representados por la expresión $4a+3$.

Todos los números enteros posibles están, por lo tanto, contenidos en una u otra de estas cuatro expresiones:

$$4a, 4a+1, 4a+2, 4a+3.$$

62. Sucede casi lo mismo cuando el divisor es 5, porque todos los números que pueden ser divididos entre él están comprendidos en la expresión $5a$, y aquellos que no pueden ser divididos entre 5 son reducibles a una de las siguientes expresiones:

$$5a + 1{,}5a + 2{,}5a + 3{,}5a + 4.$$

Podemos seguir de la misma manera y considerar los divisores más grandes.

63. Es apropiado recordar aquí lo que se ha dicho sobre la resolución de números en sus factores simples, porque todo número entre cuyos factores se encuentra 2, o 3, o 4, o 5, o 7, o cualquier otro número, será divisible por tales números. Por ejemplo, 60 siendo igual a $2 \times 2 \times 3 \times 5$, es evidente que es divisible entre 2, y entre 3, y entre 5.

64. Además, como la expresión general *abcd* no es sólo divisible entre *a*, y entre *b*, y entre *c*, y entre *d*, sino también entre *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*, y entre *abc*, *abd*, *acd*, *bcd*, y por último entre *abcd*, esto es, por su propio valor, se sigue que 60 o $2 \times 2 \times 3 \times 5$ puede ser dividido no sólo por estos números simples, sino también por aquellos que están compuestos por dos de ellos, es decir, por 4, 6, 10, 15, y también por aquellos que están compuestos por tres factores simples, esto es, por 12, 20, 30, y por último, también por el propio 60.

65. *Por lo tanto, cuando hemos representado cualquier número asumido a placer por sus factores simples, será muy fácil mostrar todos los números por los cuales es divisible. Para esto sólo tenemos, primero, que tomar los factores simples uno por uno, y después multiplicarlos dos por dos, tres por tres, cuatro por cuatro, etc., hasta que lleguemos al número propuesto*.

66. Debe ser particularmente observado que todo número es divisible entre 1, y también que todo número es divisible entre sí mismo, así que todo número tiene por lo menos dos factores o divisores: el propio número y la unidad. Pero todo número que no tiene otro divisor excepto estos dos pertenece a la clase de números que antes hemos llamado *simples* o *primos*.

Excepto estos últimos, todos los otros números tienen, además de la unidad y de sí mismos, otros divisores, tal como puede verse en la siguiente tabla en donde están puestos, bajo cada número, todos sus divisores.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 3 5 15	1 2 4 8 16	1 17	1 2 3 6 9 18	1 19	1 2 4 5 10 20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
P	P	P		P		P				P		P				P		P	

67. Por último, debemos notar que 0, o *nada*, puede considerarse como un número que tiene la propiedad de ser divisible por todos los números posibles, porque por cualquier número *a* que dividamos 0, el cociente siempre es 0; para esto debe observarse que la multiplicación de cualquier número por *nada* produce nada, y por tanto 0 veces *a*, o $0a$, es 0.

CAPÍTULO VII

DE LAS FRACCIONES EN GENERAL

68. Cuando de un número, como 7 por ejemplo, se dice que no es divisible por otro número, supongamos por 3, esto sólo significa que el cociente no puede ser expresado por un número entero, y no debe pensarse de ninguna manera que es imposible formarse una idea de tal cociente. Únicamente imaginemos una línea de 7 metros de longitud, y nadie pondrá en duda la posibilidad de dividir esta línea en tres partes iguales y de formarse una noción de la longitud de una de estas partes.

69. Como podemos formarnos una idea precisa del cociente obtenido en casos similares, aun cuando ese cociente no sea un número entero, esto nos lleva a considerar una especie de números particular, llamados *fracciones* o *números quebrados*. El ejemplo anterior nos proporciona un ejemplo. Si tenemos que dividir 7 entre 3, concebimos fácilmente el cociente que ha de resultar y lo expresamos como $\frac{7}{3}$, poniendo el divisor bajo el dividendo y separando ambos números por un trazo o línea.

70. Así, *por lo general, cuando el número a ha de ser dividido entre el número b, representamos el cociente por* $\frac{a}{b}$*, y llamamos fracción a esta forma de expresión*. Por consiguiente, no podemos ofrecer una mejor idea de una fracción $\frac{a}{b}$ que diciendo que así expresamos el cociente resultante de la división del número de arriba por el de abajo. También debemos recordar que en todas las fracciones al número de abajo se le llama *denominador* y al de arriba de la línea *numerador*.

71. En la fracción $\frac{7}{3}$, que leemos como *siete tercios*, 7 es el numerador y 3 el denominador. También debemos leer $\frac{2}{3}$ como dos tercios, $\frac{3}{4}$ como tres cuartos, $\frac{3}{8}$ como tres octavos, $\frac{12}{100}$ como doce centésimos, y $\frac{1}{2}$ como un medio.

72. Para obtener un conocimiento más perfecto de la naturaleza de las fracciones, debemos comenzar por considerar el caso en donde el numerador es igual al denominador, como en $\frac{a}{a}$. Ahora, como esto expresa el cociente obtenido al dividir *a* entre *a*, es evidente que este cociente es exactamente una unidad, y que consecuentemente la fracción $\frac{a}{a}$ es igual a 1 o a un entero. Por la misma razón, todas las fracciones $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}$, etc., son iguales entre sí, cada una siendo igual a 1 o a un entero.

73. Hemos visto que una fracción cuyo numerador es igual al denominador es igual a una unidad. Por lo tanto, todas las fracciones cuyos numeradores son menores que los denominadores tienen un valor menor que una unidad, porque si tengo un número a ser dividido entre otro que es mayor, el resultado necesariamente debe ser menor que 1. Si cortamos una línea de dos metros de largo, por ejemplo, en tres partes, una de tales partes será innegablemente menor que un metro. Es evidente, pues, que $\frac{2}{3}$ es menor que 1 por la misma razón que el numerador 2 es menor que el denominador 3.

74. Si, por el contrario, el numerador es mayor que el denominador, el valor de la fracción será mayor que una unidad. Así, $\frac{3}{2}$ es mayor que 1 porque $\frac{3}{2}$ es igual a $\frac{2}{2}$ junto con $\frac{1}{2}$. Ahora, $\frac{2}{2}$ es exactamente 1, y consecuentemente $\frac{3}{2}$ es igual a $1+\frac{1}{2}$, es decir, un entero y un medio. De igual manera, $\frac{4}{3}$ es igual a $1\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$ a $1\frac{2}{3}$, y $\frac{7}{3}$ a $2\frac{1}{3}$. Por lo general, en estos casos es suficiente con dividir el número de arriba entre el de abajo y después añadir al cociente una fracción que tenga al residuo como numerador y al divisor como denominador. Si la fracción dada fuese, por ejemplo, $\frac{43}{12}$, tendríamos 3 como cociente y 7 como residuo, de donde concluimos que $\frac{43}{12}$ es lo mismo que $3\frac{7}{12}$.

75. Es así que vemos cómo las fracciones cuyos numeradores son mayores que los denominadores son resueltas en dos números: uno de ellos es un entero y el otro un número fraccionario teniendo un numerador menor que el denominador. A tales fracciones, como contienen uno o más enteros, se les llama *fracciones impropias* para distinguirlas de las fracciones propiamente dichas que, teniendo un numerador menor que el denominador, son menores que una unidad o que un entero.

76. La naturaleza de las fracciones es frecuentemente considerada de otra manera que puede arrojar más luz a la cuestión. Si consideramos, por ejemplo, la fracción $\frac{3}{4}$, es evidente que es tres veces mayor que $\frac{1}{4}$. Ahora bien, esta fracción $\frac{1}{4}$ significa que si dividimos 1 en 4 partes iguales, este será el valor de una de tales partes; es obvio, pues, que al tomar 3 de tales partes tendremos el valor de la fracción $\frac{3}{4}$.

De la misma forma podemos considerar cualquier otra fracción; por ejemplo, $\frac{7}{12}$. Si dividimos la unidad en 12 partes iguales, 7 de tales partes serán iguales a la fracción propuesta.

77. Las expresiones *numerador* y *denominador* derivan de esta forma de considerar las fracciones, porque como en la fracción precedente $\frac{7}{12}$ el número bajo la línea muestra que 12 es el número de partes en las cuales ha de ser dividida la unidad, y como podría decirse que denota o nombra las partes, no ha sido impropiamente llamado *denominador*.

Además, como el número de arriba, a saber, 7, muestra que para poder tener el valor de la fracción debemos tomar o recoger 7 de sus partes, y por lo tanto puede decirse que las cuenta o las numera, se ha considerado adecuado llamar *numerador* al número arriba de la línea.

78. Debido a que es fácil comprender qué son $\frac{3}{4}$ cuando conocemos el significado de $\frac{1}{4}$, podemos considerar a las fracciones cuyo numerador es la unidad como el fundamento de todas las demás. Tales son las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$, etc., y debe observarse que estas fracciones siguen disminuyendo continuamente, porque entre más se divida un entero, o entre mayor sea el número de partes en el que se distribuye, menor se vuelve cada una de tales partes. De esta manera, $\frac{1}{100}$ es menor que $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{1000}$ es menor que $\frac{1}{100}$, y $\frac{1}{10000}$ es menor que $\frac{1}{1000}$.

79. Como hemos visto que entre más aumentemos el denominador de tales fracciones menores se vuelven sus valores, podría preguntarse si no es posible hacer tan grande al denominador como para que la fracción se reduzca a nada. Yo respondo que no, porque sin importar el número de partes en el que se divida la unidad (la longitud de un metro, por ejemplo), y sin importar qué tan pequeñas sean, siempre conservarán una cierta magnitud, y por lo tanto nunca pueden reducirse absolutamente a nada.

80. Es cierto que si dividimos la longitud de un metro en 1000 partes, tales partes no caerán fácilmente bajo el conocimiento de nuestros sentidos, pero vistas a través de un buen microscopio cada una de ellas nos parecerá lo suficientemente grande como para ser subdividida en 100 partes más, y aún en más.

Sin embargo, actualmente no tenemos nada que ver con lo que depende de nosotros, o con lo que somos capaces de realizar y con lo que nuestros ojos pueden percibir, así que la cuestión tiene que ver más bien con lo que es posible en sí mismo. Y en este sentido de la palabra es verdad que, no importa qué tan grande supongamos al denominador, la fracción nunca desaparecerá por completo, o nunca será igual a 0.

81. Por lo tanto, nunca llegaremos completamente a nada, no obstante qué tan grande sea el denominador, y como tales fracciones siempre conservarán una cierta cantidad, podemos continuar la serie de fracciones del artículo 78 sin interrupción alguna. Esta circunstancia ha introducido la expresión de que el denominador debe ser *infinito*, o infinitamente grande, para que la fracción se reduzca a 0 o a nada; y la palabra *infinito* en realidad significa aquí que nunca llegaremos al final de la serie de las *fracciones* arriba mencionadas.

82. Para expresar esta idea, extremadamente bien fundamentada, hacemos uso del signo ∞ que consecuentemente indica un número infinitamente grande, y por tanto podemos decir que la fracción $\frac{1}{\infty}$ es en realidad nada, por la misma razón de que una fracción no puede reducirse a nada hasta que el denominador haya sido incrementado hasta el *infinito*.

83. Es muy necesario prestar atención a esta idea del infinito porque deriva de los primeros fundamentos de nuestro conocimiento y porque será de mucha importancia en la siguiente parte de este tratado.

De ella podemos deducir unas cuantas consecuencias que resultan extremadamente curiosas y dignas de atención. La fracción $\frac{1}{\infty}$ representa el cociente que resulta de la división del dividendo 1 entre el divisor ∞. Ahora, sabemos que si dividimos el dividendo 1 entre el cociente $\frac{1}{\infty}$, que es igual a 0, obtenemos de nuevo el divisor ∞; desde aquí adquirimos una nueva idea del infinito. Aprendemos que surge de la división de 1 entre 0, y por tanto tenemos derecho a decir que 1 dividido entre 0 expresa un número infinitamente grande, o ∞.

84. En este momento es necesario corregir el error de aquellos que sostienen que un número infinitamente grande no es susceptible de aumento. Esta opinión es inconsistente

con los principios que hemos establecido, porque $\frac{1}{0}$ significando un número infinitamente grande, y $\frac{2}{0}$ siendo incontestablemente el doble de $\frac{1}{0}$, es evidente que un número, aunque infinitamente grande, puede ser dos o más veces más grande.

CAPÍTULO VIII

DE LAS PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

85. Ya vimos que cada una de las fracciones $\frac{2}{2},\frac{3}{3},\frac{4}{4},\frac{5}{5},\frac{6}{6},\frac{7}{7},\frac{8}{8}$, etc., produce un entero, y que consecuentemente todas son iguales entre sí. La misma igualdad existe en las siguientes fracciones, $\frac{2}{1},\frac{4}{2},\frac{6}{3},\frac{8}{4},\frac{10}{5},\frac{12}{6}$, cada una produciendo dos enteros, porque el numerador de cada una dividido entre su denominador da 2. Así también todas las fracciones $\frac{3}{1},\frac{6}{2},\frac{9}{3},\frac{12}{4},\frac{15}{5},\frac{18}{6}$, etc., son iguales entre sí porque 3 es su valor común.

86. De igual forma podemos representar el valor de cualquier fracción en una infinita variedad de formas, porque *si multiplicamos tanto al numerador como al denominador de una fracción por el mismo número asumido a placer, esta fracción conservará el mismo valor*. Es por esto que todas las fracciones $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8},\frac{5}{10},\frac{6}{12},\frac{7}{14},\frac{8}{16},\frac{9}{18},\frac{10}{20}$, etc., son iguales, porque el valor de cada una es $\frac{1}{2}$. También $\frac{1}{3},\frac{2}{6},\frac{3}{9},\frac{4}{12},\frac{5}{15},\frac{6}{18},\frac{7}{21},\frac{8}{24},\frac{9}{27},\frac{10}{30}$, etc., son fracciones iguales, porque el valor de cada una es $\frac{1}{3}$. Las fracciones $\frac{2}{3},\frac{4}{6},\frac{8}{12},\frac{10}{15},\frac{12}{18},\frac{14}{21},\frac{16}{24}$, etc., tienen igualmente todas el mismo valor, y es así que podemos concluir que, por lo general, la fracción $\frac{a}{b}$ puede ser representada por las siguientes expresiones, cada una siendo igual a $\frac{a}{b}$: $\frac{a}{b},\frac{2a}{2b},\frac{3a}{3b},\frac{4a}{4b},\frac{5a}{5b},\frac{6a}{6b},\frac{7a}{7b}$, etc.

87. Para convencernos de esto únicamente tenemos que escribir, para el valor de la fracción $\frac{a}{b}$, una cierta letra *c* que represente el cociente de la división de *a* entre *b*, y recordar que la multiplicación del cociente *c* por el divisor *b* debe dar el dividendo [*a*]. Como *c* multiplicado por *b* da *a*, es evidente que *c* multiplicado por $2b$ debe dar $2a$, que *c* multiplicado por $3b$ dará $3a$ y que, por lo general, *c* multiplicado por *mb* debe dar *ma*. Ahora, cambiando esto a un ejemplo de la división, y dividiendo el producto *ma* entre *mb*, uno de los factores, el cociente, debe ser igual al otro factor *c*; pero *ma* dividido entre *mb* también produce la fracción $\frac{ma}{mb}$, que es consecuentemente igual a *c*, y esto es lo que habríamos de probar, porque habiendo asumido a *c* como el valor de la fracción $\frac{a}{b}$, es evidente que esta fracción es igual a la fracción $\frac{ma}{mb}$, sin importar cuál sea el valor de *m*.

88. Hemos visto que *toda fracción puede ser representada en un número infinito de formas*, cada una de las cuales contiene el mismo valor, y es claro que de todas estas formas, aquellas que estén compuestas de los números menores serán más fácilmente comprendidas. Por ejemplo, podríamos sustituir $\frac{2}{3}$ por las siguientes fracciones, $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}$, etc., pero de todas estas expresiones, $\frac{2}{3}$ es aquella de la cual es más fácil formarse una idea. Aquí, por lo tanto, surge un problema: ¿cómo puede una fracción como $\frac{8}{12}$, que no está expresada por los números menores posibles, reducirse a su forma más simple, o a *sus términos mínimos*, esto es, en nuestro ejemplo, a $\frac{2}{3}$?

89. Es fácil resolver este problema si tomamos en cuenta que una fracción conserva su valor cuando multiplicamos ambos de sus términos, o su numerador y su denominador, por el mismo número. De esto se sigue que *si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, la fracción conservará el mismo valor*. Esto se hace más evidente por medio de la expresión general $\frac{ma}{mb}$, porque si dividimos el numerador *ma*

y el denominador *mb* entre el número *m*, obtenemos la fracción $\frac{a}{b}$, que es igual, tal como ya probamos, a $\frac{ma}{mb}$.

90. Por lo tanto, para reducir una fracción dada a sus términos menores requerimos encontrar un número por el cual puedan dividirse tanto el numerador como el denominador. A tal número se le llama *divisor común*, y siempre que podamos encontrar un divisor común para el numerador y para el denominador, es cierto que podremos reducir una fracción a su forma más baja; pero, por el contrario, si vemos que excepto por la unidad, no se encuentra ningún otro divisor común, esto muestra que la fracción ya se encuentra en su forma más simple posible.

91. Para aclarar esto, consideremos la fracción $\frac{48}{120}$. Inmediatamente vemos que ambos términos son divisibles por 2, y que de ello resulta la fracción $\frac{24}{60}$. Entonces puede ser dividida de nuevo entre 2 y ser reducida a $\frac{12}{30}$, y esto también, al tener 2 como divisor común, puede reducirse a $\frac{6}{15}$. Pero ahora fácilmente percibimos que el numerador y el denominador son todavía divisibles por 3, y al realizar esta división obtenemos la fracción $\frac{2}{5}$, que es igual a la fracción propuesta y que da la expresión más simple a la que puede reducirse, porque 2 y 5 no tienen ningún divisor común excepto 1, que de ninguna manera puede disminuir más estos números.

92. Esta propiedad de que las fracciones conservan un valor invariable sin importar si dividimos o multiplicamos el numerador y el denominador por el mismo número es de suma importancia, y es el fundamento principal de la doctrina de las fracciones. Por ejemplo, apenas podemos sumar dos fracciones, o restar una de la otra, si antes no las hemos reducido, por medio de esta propiedad, a sus otras formas, esto es, a expresiones cuyos denominadores son iguales. De esto trataremos en el siguiente capítulo.

93. Concluimos el presente capítulo observando que todos los números enteros también pueden representarse por fracciones. Por ejemplo, 6 es lo mismo que $\frac{6}{1}$, porque 6

dividido entre 1 da 6; y de igual forma podemos expresar el número 6 por las fracciones $\frac{12}{2}, \frac{18}{3}, \frac{24}{4}, \frac{36}{6}$, etc., y por un número infinito de otras [fracciones] que tienen el mismo valor.

CAPÍTULO IX

DE LA ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

94. Cuando las fracciones tienen denominadores iguales, no hay dificultad alguna en añadirlas y sustraerlas, porque $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ es igual a $\frac{5}{7}$, y $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ es igual a $\frac{2}{7}$. En este caso, ya sea para la adición o para la sustracción, únicamente alteramos los numeradores y ponemos el denominador común debajo de la línea, así: $\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100}$ es igual a $\frac{9}{100}$, $\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50}$ es igual a $\frac{36}{50}$ o a $\frac{18}{25}$, $\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20}$ es igual a $\frac{16}{20}$ o a $\frac{4}{5}$, también $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ es igual a $\frac{3}{3}$ o a 1, es decir, a un entero, y $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ es igual a $\frac{0}{4}$, esto es, a nada o a 0.

95. Pero *cuando las fracciones no tienen denominadores iguales, siempre podemos transformarlas en otras fracciones que tengan el mismo denominador*. Por ejemplo, cuando se propone sumar las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, debemos considerar que $\frac{1}{2}$ es lo mismo que $\frac{3}{6}$, y que $\frac{1}{3}$ es equivalente a $\frac{2}{6}$; tenemos, por tanto, en lugar de las dos fracciones propuestas, estas dos $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$, cuya suma es $\frac{5}{6}$. Si las dos fracciones estuviesen unidas por el signo *menos*, como en $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, tendríamos $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ o $\frac{1}{6}$.

Otro ejemplo: sean las fracciones propuestas $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$; como $\frac{3}{4}$ es lo mismo que $\frac{6}{8}$, podemos sustituir este valor por aquél y decir que $\frac{6}{8}+\frac{5}{8}$ da $\frac{11}{8}$ o $1\frac{3}{8}$.

Supongamos también que se requiriese la suma de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$. Yo digo que es $\frac{7}{12}$, porque $\frac{1}{3}$ hace $\frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4}$ hace $\frac{3}{12}$.

96. *Podemos tener un número mayor de fracciones a ser reducidas a un denominador común*; por ejemplo, $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$; *en este caso, todo depende de encontrar un número que sea divisible por todos los denominadores de tales fracciones*. Aquí 60 es el número que tiene esa propiedad, y consecuentemente se vuelve el denominador común. Tendremos, por tanto, $\frac{30}{60}$ en lugar de $\frac{1}{2}$, $\frac{40}{60}$ en lugar de $\frac{2}{3}$, $\frac{45}{60}$ en lugar de $\frac{3}{4}$, $\frac{48}{60}$ en lugar de $\frac{4}{5}$, y $\frac{50}{60}$ en lugar de $\frac{5}{6}$. *Si requerimos sumar* todas estas *fracciones* $\frac{30}{60},\frac{40}{60},\frac{45}{60},\frac{48}{60}$, y $\frac{50}{60}$, *sólo tenemos que sumar todos los numeradores y poner bajo la suma el denominador común 60*, esto es, tendremos $\frac{213}{60}$ o tres enteros y $\frac{33}{60}$ o $3\frac{11}{20}$.

97. Toda esta operación consiste, como antes dijimos, en transformar dos fracciones cuyos denominadores son distintos en otras dos cuyos denominadores sean iguales. Para realizar esto de forma general, sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ las fracciones propuestas. Primero, multipliquemos los dos términos de la primera fracción por *d*, y tendremos la fracción $\frac{ad}{bd}$ igual a $\frac{a}{b}$; después multipliquemos los dos términos de la segunda fracción por *b*, y tendremos un valor equivalente expresado por $\frac{bc}{bd}$; de esta forma, los dos denominadores se han vuelto iguales. Ahora, si se requiriese la suma de las dos fracciones propuestas, inmediatamente responderíamos que es $\frac{ad+bc}{bd}$, y si se nos preguntara su diferencia diríamos que es $\frac{ad-bc}{bd}$. Si se propusiesen, por ejemplo, las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{7}{9}$, obtendríamos en su lugar $\frac{45}{72}$ y $\frac{56}{72}$, cuya suma sería $\frac{101}{72}$ y la diferencia $\frac{11}{72}$.

98. A esta parte del tema pertenece la cuestión de entre dos fracciones propuestas, cuál es la mayor o la menor, porque para resolver esto sólo tenemos que reducir las dos fracciones al mismo denominador. Tomemos, por ejemplo, las dos fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$; cuando las reducimos al mismo denominador, la primera se vuelve $\frac{14}{21}$ y la segunda $\frac{15}{21}$, y es evidente que la segunda fracción, o $\frac{5}{7}$, es la mayor, y que excede a la primera por $\frac{1}{21}$.

De nuevo, sean las dos fracciones propuestas $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{8}$. Tendremos que sustituir por ellas $\frac{24}{40}$ y $\frac{25}{40}$, respectivamente. De esto podemos concluir que $\frac{5}{8}$ excede a $\frac{3}{5}$ pero sólo por $\frac{1}{40}$.

99. *Cuando se requiere sustraer una fracción de un entero, es suficiente con cambiar una de las unidades del entero en una fracción que tenga el mismo denominador que el de aquella que ha de ser sustraída*; en el resto de la operación no hay dificultad alguna. Si se requiriese, por ejemplo, sustraer $\frac{2}{3}$ de 1, escribimos $\frac{3}{3}$ en lugar de 1 y decimos que $\frac{2}{3}$ tomados de $\frac{3}{3}$ deja $\frac{1}{3}$ como resto. Así, $\frac{5}{12}$ sustraído de 1 deja $\frac{7}{12}$.

Si se requiriese sustraer $\frac{3}{4}$ de 2, escribimos 1 y $\frac{4}{4}$ en lugar de 2, e inmediatamente veremos que después de la sustracción debe quedar $1\frac{1}{4}$.

100. A veces también sucede que, habiendo sumado dos o más fracciones, obtenemos más de un entero, esto es, un numerador mayor que el denominador. Este es un caso que ya ha ocurrido y que merece nuestra atención.

En el artículo 96 encontramos, por ejemplo, que la suma de las cinco fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, y $\frac{5}{6}$ es $\frac{213}{60}$, y observamos que el valor de esta suma es 3 enteros y $\frac{33}{60}$ o $\frac{11}{20}$. De igual forma $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, o $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ da $\frac{17}{12}$ o $1\frac{5}{12}$. Únicamente tenemos que realizar la

división real del numerador entre el denominador, ver cuántos enteros hay para el cociente, y establecer el resto. Casi lo mismo debe hacerse al sumar números compuestos de enteros y fracciones, y si su suma produce uno o más enteros, éstos se suman a los otros enteros. Propongamos, por ejemplo, sumar $3\frac{1}{2}$ y $2\frac{2}{3}$; primero tomamos la suma de $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, o de $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{6}$. Es $\frac{7}{6}$ o $1\frac{1}{6}$, y entonces la suma total es $6\frac{1}{6}$.

CAPÍTULO X

DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE FRACCIONES

101. *La regla para la multiplicación de una fracción por un número entero es multiplicar el numerador sólo por el número dado y no cambiar el denominador*, así:

2 veces $\frac{1}{2}$ da $\frac{2}{2}$ o 1 entero;

2 veces $\frac{1}{3}$ da $\frac{2}{3}$;

3 veces $\frac{1}{6}$ da $\frac{3}{6}$ o $\frac{1}{2}$, y

4 veces $\frac{5}{12}$ da $\frac{20}{12}$, o $1\frac{8}{12}$, o $1\frac{2}{3}$.

Pero en lugar de esta regla, podemos utilizar la de *dividir el denominador entre el entero dado, y esto, cuando puede hacerse, es preferible porque acorta la operación*. Requiérase, por ejemplo, multiplicar $\frac{8}{9}$ por 3; si multiplicamos el numerador por el entero dado obtenemos $\frac{24}{9}$, que debemos reducir a $\frac{8}{3}$. Pero si no cambiamos el numerador y dividimos el denominador entre el entero, inmediatamente encontramos $\frac{8}{3}$ o $2\frac{2}{3}$ para el producto dado. Igualmente, $\frac{13}{24}$ multiplicado por 6 da $\frac{13}{4}$ o $3\frac{1}{4}$.

102. Por lo general, el producto de la multiplicación de una fracción $\frac{a}{b}$ por c es $\frac{ac}{b}$, y debe observarse que *cuando el entero es exactamente igual al denominador, el producto debe ser igual al numerador*. Así que

$\frac{1}{2}$ tomado dos veces da 1;

$\frac{2}{3}$ tomado tres veces da 2;

$\frac{3}{4}$ tomado 4 veces da 3.

Y, por lo general, si multiplicamos la fracción $\frac{a}{b}$ por el número b, el producto debe ser a, tal como hemos mostrado, porque como $\frac{a}{b}$ expresa el cociente que resulta de la división del dividendo a entre el divisor b, y como hemos demostrado que el cociente multiplicado por el divisor dará el dividendo, es evidente que $\frac{a}{b}$ multiplicado por b debe producir a.

103. Hemos mostrado cómo ha de multiplicarse un fracción por un entero; consideremos ahora *cómo ha de dividirse una fracción entre un entero*. Para esta indagación es necesario que antes procedamos a la multiplicación de fracciones por fracciones. Es claro que si tenemos que dividir la fracción $\frac{2}{3}$ entre 2 el resultado será $\frac{1}{3}$, y que el cociente de $\frac{6}{7}$ dividido entre 3 es $\frac{2}{7}$. La regla, por tanto, es *dividir el numerador entre el entero sin cambiar el denominador*. Así:

$\frac{12}{25}$ dividido entre 2 da $\frac{6}{25}$;

$\frac{12}{25}$ dividido entre 3 da $\frac{4}{25}$, y

$\frac{12}{25}$ dividido entre 4 da $\frac{3}{25}$, etc.

104. Esta regla es fácilmente practicable siempre que el numerador sea divisible entre el número propuesto, pero muchas veces este no es el caso. Debemos observar, por tanto, que una fracción puede ser transformada en un número infinito de otras expresiones, y que ese número debe ser uno por el cual el numerador pueda ser dividido entre el entero dado. Si se requiriese, por ejemplo, dividir $\frac{3}{4}$ entre 2, tendríamos que cambiar la fracción a $\frac{6}{8}$ y después dividir el numerador entre 2, para así inmediatamente tener $\frac{3}{8}$ como el cociente buscado.

Por lo general, si se propone dividir la fracción $\frac{a}{b}$ entre *c*, la transformamos a $\frac{ac}{bc}$ y después dividimos el numerador *ac* entre *c* y escribimos $\frac{a}{bc}$ por el cociente buscado.

105. Por consiguiente, *cuando una fracción* $\frac{a}{b}$ *ha de ser dividida entre un entero c, sólo tenemos que multiplicar el denominador por tal número y dejar al numerador tal como está*. Así, $\frac{5}{8}$ dividido entre 3 da $\frac{5}{24}$, y $\frac{9}{6}$ dividido entre 5 da $\frac{9}{30}$.

Esta operación se vuelve más fácil cuando el propio numerador es divisible entre el entero, tal como hemos supuesto en el artículo 103. Por ejemplo, $\frac{9}{16}$ dividido entre 3 daría, de acuerdo con nuestra última regla, $\frac{9}{48}$; pero por la primera regla, que es aplicable aquí, obtenemos $\frac{3}{16}$, una expresión equivalente a $\frac{9}{48}$ pero más simple.

106. Ahora podemos comprender cómo es que una fracción $\frac{a}{b}$ puede ser multiplicada por otra fracción $\frac{c}{d}$. Sólo tenemos que considerar que $\frac{c}{d}$ significa que *c* es dividido entre *d*, y sobre este principio primero debemos multiplicar la fracción $\frac{a}{b}$ por *c*, lo que produce $\frac{ac}{b}$, y después dividir entre *d*, lo que da $\frac{ac}{bd}$.

De aquí la siguiente regla para multiplicar fracciones: multiplicar por separado los numeradores y los denominadores. Así,

$\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{3}$ da el producto $\frac{2}{6}$, o $\frac{1}{3}$;

$\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ hace $\frac{8}{15}$;

$\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{12}$ produce $\frac{15}{48}$, o $\frac{5}{16}$, etc.

107. Queda por demostrar *cómo una fracción puede ser dividida por otra*. Notemos primero que *si las dos fracciones tienen el mismo número por denominador, la división tiene lugar sólo con respecto a los numeradores*, porque es evidente que $\frac{3}{12}$ están contenidos tantas veces en $\frac{9}{12}$ como lo están 3 en 9, esto es, tres veces; e igualmente, para dividir $\frac{8}{12}$ entre $\frac{9}{12}$ tenemos que dividir 8 entre 9, lo que da $\frac{8}{9}$. También tenemos $\frac{6}{20}$ en $\frac{18}{20}$, 3 veces; $\frac{7}{100}$ en $\frac{49}{100}$, 7 veces, $\frac{7}{25}$ en $\frac{6}{25}$, $\frac{6}{7}$, etc.

108. Pero *cuando las fracciones no tienen denominadores iguales*, tenemos que recurrir al método ya mencionado de reducirlas a un denominador común. Sea, por ejemplo, la fracción $\frac{a}{b}$ a ser dividida entre la fracción $\frac{c}{d}$. Primero las reducimos al mismo denominador, y entonces tenemos $\frac{ad}{bd}$ a ser dividido entre $\frac{cd}{db}$; ahora es evidente que el cociente debe estar representado simplemente por la división de *ad* entre *bc*, lo que da $\frac{ad}{bc}$. De aquí se sigue la regla: *multiplíquese el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el denominador del dividendo por el numerador del divisor; el primer producto será el numerador del cociente y el segundo será su denominador*.

109. Después de aplicar esta regla a la división de $\frac{5}{8}$ entre $\frac{2}{3}$, tendremos el cociente $\frac{15}{16}$; la división de $\frac{3}{4}$ entre $\frac{1}{2}$ dará $\frac{6}{4}$ o $\frac{3}{2}$ o 1 y $\frac{1}{2}$, y $\frac{25}{48}$ entre $\frac{5}{6}$ dará $\frac{150}{240}$ o $\frac{5}{8}$.

110. Esta regla suele representarse de una manera que resulta más fácil de recordar: *inviértase la fracción que es el divisor para que el denominador esté en lugar del numerador y escríbase este último bajo la línea; después multiplíquese la fracción que es el dividendo por esta fracción invertida y el producto será el cociente buscado*. De esta forma, $\frac{3}{4}$ dividido entre $\frac{1}{2}$ es lo mismo que $\frac{3}{4}$ multiplicado por $\frac{2}{1}$, lo que da $\frac{6}{4}$ o $1\frac{1}{2}$. También $\frac{5}{8}$ dividido entre $\frac{2}{3}$ es lo mismo que $\frac{5}{8}$ multiplicado por $\frac{3}{2}$, lo que da $\frac{15}{16}$; o $\frac{25}{48}$ dividido entre $\frac{5}{6}$ da lo mismo que $\frac{25}{48}$ multiplicado por $\frac{6}{5}$, cuyo producto es $\frac{150}{240}$ o $\frac{5}{8}$.

Vemos pues, que por lo general *dividir entre la fracción* $\frac{1}{2}$ *es lo mismo que multiplicar por* $\frac{2}{1}$ *o por 2, y que la división entre* $\frac{1}{3}$ *equivale a la multiplicación por* $\frac{3}{1}$ *o por 3, etc*.

111. El número 100 dividido entre $\frac{1}{2}$ dará 200, y 1000 dividido entre $\frac{1}{3}$ dará 3000. Más allá, si se requiriera dividir 1 entre $\frac{1}{1000}$, el cociente sería 1000, y al dividir 1 entre $\frac{1}{100000}$ el cociente es 100000. Esto nos permite concebir que, cuando cualquier número es dividido entre 0, el resultado debe ser un número infinitamente grande, porque incluso la división de 1 entre la pequeña fracción $\frac{1}{1000000000}$ da como cociente el gran número 1000000000.

112. Como todo número que es dividido entre sí mismo produce una unidad, es claro que una fracción dividida entre sí misma también debe dar 1 como cociente. Lo

mismo se sigue de nuestra regla, porque para dividir $\frac{3}{4}$ entre $\frac{3}{4}$ debemos multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{4}{3}$, y obtenemos $\frac{12}{12}$ o 1, y si queremos dividir $\frac{a}{b}$ entre $\frac{a}{b}$ multiplicamos $\frac{a}{b}$ por $\frac{b}{a}$, y el producto $\frac{ab}{ab}$ también es igual a 1.

113. Todavía nos queda explicar una expresión que es utilizada con frecuencia. Podría preguntarse, por ejemplo, cuál es la mitad de $\frac{3}{4}$; esto significa que debemos multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}$. Así también, si se requiriese el valor de $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{8}$, debemos multiplicar $\frac{5}{8}$ por $\frac{2}{3}$, lo que produce $\frac{10}{24}$, y $\frac{3}{4}$ de $\frac{9}{16}$ es lo mismo que $\frac{9}{16}$ multiplicado por $\frac{3}{4}$, que produce $\frac{27}{64}$.

114. Por último, debemos observar, con respecto a los signos + y -, las mismas reglas que ya establecimos para los números enteros. Así, $+\frac{1}{2}$ multiplicado por $-\frac{1}{3}$ da $-\frac{1}{6}$, y $-\frac{2}{3}$ multiplicado por $-\frac{4}{5}$ da $+\frac{8}{15}$. Además, $-\frac{5}{8}$ dividido entre $+\frac{2}{3}$ da $-\frac{15}{16}$, y $-\frac{3}{4}$ dividido entre $-\frac{3}{4}$ da $+\frac{12}{12}$ o +1.

CAPÍTULO XI

DE LOS NÚMEROS CUADRADOS

115. *Al producto de un número multiplicado por sí mismo se le llama cuadrado, y por esta razón al número, considerado en su relación con tal producto, se le llama raíz cuadrada*.

Por ejemplo, cuando multiplicamos 12 por 12, el producto 144 es un cuadrado cuya raíz es 12.

Este término deriva de la geometría, que nos enseña que los contenidos de un cuadrado se encuentran al multiplicar su lado por sí mismo.

116. Los números cuadrados se encuentran, por tanto, por medio de la multiplicación, esto es, al multiplicar la raíz por sí misma. De esta forma, 1 es el cuadrado de 1, porque 1 multiplicado por 1 da 1; 4 es el cuadrado de 2, y 9 es el cuadrado de 3; también, 2 es la raíz de 4 y 3 es la raíz de 9.

Comenzaremos por considerar los cuadrados de los números naturales, y así daremos la siguiente tabla: en la primera línea están acomodados varios números o raíces, y en la segunda sus cuadrados.

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Cuadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169

117. Fácilmente será percibido que la serie de los números cuadrados así acomodados tiene una propiedad singular, a saber, que si se resta cada uno de ellos de aquel que inmediatamente le sigue, los restos siempre aumentan en 2 y se forma esta serie: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.

118. *Los cuadrados de las fracciones se encuentran de la misma manera, i. e., al multiplicar cualquier fracción dada por sí misma*. Por ejemplo, el cuadrado de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{4}$, el de $\frac{1}{3}$ es $\frac{1}{9}$, el de $\frac{2}{3}$ es $\frac{4}{9}$, el de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{16}$, y el de $\frac{3}{4}$ es $\frac{9}{16}$.

Sólo tenemos que dividir el cuadrado del numerador entre el cuadrado del denominador, y la fracción que expresa tal división será el cuadrado de la fracción dada. Así, $\frac{25}{64}$ es el cuadrado de $\frac{5}{8}$ y, recíprocamente, $\frac{5}{8}$ es la raíz de $\frac{25}{64}$.

119. Cuando se requiere el cuadrado de un número mixto, o de un número compuesto por un entero y una fracción, sólo tenemos que reducirlo a una sola fracción y después tomar el cuadrado de ésta. Requiérase, por ejemplo, encontrar el cuadrado de $2\frac{1}{2}$; primero expresamos este número con $\frac{5}{2}$ y, tomando el cuadrado de esta fracción, tenemos $\frac{25}{4}$ o $6\frac{1}{4}$ para el valor del cuadrado de $2\frac{1}{2}$. Para obtener el cuadrado de $3\frac{1}{4}$ decimos que

$3\frac{1}{4}$ es igual a $\frac{13}{4}$, y que por tanto su cuadrado es igual a $\frac{169}{16}$ o a 10 y $\frac{9}{16}$. Los cuadrados de los números entre 3 y 4, suponiendo que aumentan por un cuarto, son como siguen:

Números	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Cuadrados	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

De esta pequeña tabla podemos inferir que si una raíz contiene una fracción, entonces su cuadrado también contiene una. Sea, por ejemplo, $1\frac{5}{12}$ la raíz; su cuadrado será $\frac{289}{144}$ o $2\frac{1}{144}$, esto es, un poco más grande que el entero 2.

120. Pasemos a las expresiones generales. Cuando la raíz es *a*, el cuadrado debe ser *aa*; si la raíz es 2*a*, el cuadrado es 4*aa*, lo que muestra que al duplicar la raíz, el cuadrado se vuelve 4 veces más grande. Así que si la raíz es 3*a*, el cuadrado es 9*aa*, y si la raíz es 4*a*, el cuadrado es 16*aa*. Pero si la raíz es *ab*, el cuadrado es *aabb*, y si la raíz es *abc*, el cuadrado es *aabbcc*.

121. Así que *cuando la raíz está compuesta de dos o más factores, multiplicamos sus cuadrados juntos y, recíprocamente, si un cuadrado está compuesto de dos o más factores de los cuales cada uno es un cuadrado, sólo tenemos que multiplicar juntas las raíces de tales cuadrados para obtener la raíz completa del cuadrado propuesto*. De esta forma, como 2304 es igual a $4\times16\times36$, su raíz cuadrada es $2\times4\times6$ o 48, y resulta que 48 es la verdadera raíz cuadrada de 2304, porque 48×48 da 2304.

122. Consideremos ahora lo relativo a los signos + y - con respecto a este tema. Antes que nada, es evidente que si la raíz tiene el signo +, es decir, si es un número positivo, su cuadrado necesariamente debe ser un número positivo, porque + por + hace +; el cuadrado de +*a* será, pues, +*aa*. Pero si la raíz es un número negativo como en $-a$, el cuadrado sigue siendo positivo porque es +*aa*. Podemos concluir, por lo tanto, que +*aa es el cuadrado tanto de* $+a$ *como de* $-a$, *y que, consecuentemente, todo cuadrado tiene dos*

raíces, una positiva y otra negativa. La raíz cuadrada de 25, por ejemplo, es tanto +5 como -5, porque tanto -5 multiplicado por -5 como +5 multiplicado por +5 dan 25.

CAPÍTULO XII

DE LAS RAÍCES CUADRADAS Y DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES QUE RESULTAN DE ELLAS

123. Lo que hemos dicho en el capítulo anterior es principalmente esto: la raíz cuadrada de un número dado no es otra cosa que un número cuyo cuadrado es igual al número dado, y podemos poner antes de tales raíces tanto al signo positivo como al negativo.

124. Así que cuando está dado un número cuadrado, y siempre que retengamos en nuestra memoria un número suficiente de números cuadrados, es fácil encontrar su raíz. Si, por ejemplo, 196 es el número dado, sabemos que su raíz cuadrada es 14. Las fracciones se manejan fácilmente del mismo modo: es claro, por ejemplo, que $\frac{5}{7}$ es la raíz cuadrada de $\frac{25}{49}$. Para convencernos de esto sólo tenemos que tomar la raíz cuadrada del numerador y la del denominador.

Si el número propuesto es un número mixto, como $12\frac{1}{4}$, lo reducimos a una sola fracción, que en este caso es $\frac{49}{4}$, e inmediatamente percibimos que $\frac{7}{2}$, o $3\frac{1}{2}$, debe ser la raíz cuadrada de $12\frac{1}{4}$.

125. Pero cuando el número dado no es un cuadrado, como 12 por ejemplo, no es posible extraer su raíz cuadrada o encontrar un número que, multiplicado por sí mismo, dé 12 como producto. Sin embargo, sabemos que la raíz cuadrada de 12 debe ser mayor que 3, porque 3×3 sólo produce 9, y menor que 4, porque 4×4 produce 16, que es más que 12. También sabemos que esta raíz es menor que $3\frac{1}{2}$, porque hemos visto que el cuadrado de

$3\frac{1}{2}$ o de $\frac{7}{2}$ es $12\frac{1}{4}$. Por último, podemos acercarnos todavía más a esta raíz si la comparamos con $3\frac{7}{15}$, porque el cuadrado de $3\frac{7}{15}$, o de $\frac{52}{15}$, es $\frac{2704}{225}$ o $12\frac{4}{225}$, de tal manera que esta fracción sigue siendo mayor que la raíz requerida, aunque muy poco mayor, ya que la diferencia entre las dos raíces es de sólo $\frac{4}{225}$.

126. Podemos suponer que, como $3\frac{1}{2}$ y $3\frac{7}{15}$ son números mayores que la raíz de 12, sería posible añadir a 3 una fracción un poco menor que $\frac{7}{15}$ precisamente tal que el cuadrado de su suma sea igual a 12.

Intentemos, pues, con $3\frac{3}{7}$, ya que $\frac{3}{7}$ es un poco menor que $\frac{7}{15}$. Ahora, $3\frac{3}{7}$ es igual a $\frac{24}{7}$, cuyo cuadrado es $\frac{576}{49}$, y consecuentemente menor por $\frac{12}{49}$ que 12, que podemos expresar por $\frac{588}{49}$. Hemos probado, por tanto, que $3\frac{3}{7}$ es menor y que $3\frac{7}{15}$ es mayor que la raíz requerida. Intentemos, pues, con un número un poco mayor que $3\frac{3}{7}$ pero menor que $3\frac{7}{15}$, por ejemplo, $3\frac{5}{11}$. Este número, que es igual a $\frac{38}{11}$, tiene como cuadrado $\frac{1444}{121}$. Al reducir 12 a este denominador obtenemos $\frac{1452}{121}$, lo que muestra que $3\frac{5}{11}$ sigue siendo menor que la raíz de 12 por $\frac{8}{121}$. Sustituyamos entonces $\frac{5}{11}$ por la fracción $\frac{6}{13}$, que es un poco mayor, y veamos cuál será el resultado de la comparación del cuadrado de $3\frac{6}{13}$ con el número 12. El cuadrado de $3\frac{6}{13}$ es $\frac{2025}{169}$; si reducimos 12 al mismo denominador es $\frac{2028}{169}$, así que es todavía muy pequeño, aunque sólo por $\frac{3}{169}$, mientras que $3\frac{7}{15}$ ha resultado ser demasiado grande.

127. Es claro, pues, que cualquier fracción que sea unida a 3, el cuadrado de tal suma siempre contendrá una fracción y nunca será exactamente igual al entero 12. Así, aunque sabemos que la raíz cuadrada de 12 es mayor que $3\frac{6}{13}$ y menor que $3\frac{7}{15}$, no es posible asignar una fracción intermedia entre estas dos que, al mismo tiempo, si es añadida a 3, exprese exactamente la raíz cuadrada de 12. A pesar de esto, no debemos afirmar que la raíz cuadrada de 12 está absolutamente y en sí misma indeterminada; sólo se sigue que esta raíz, aunque necesariamente tiene una magnitud determinada, no puede expresarse por fracciones.

128. *Existe, por lo tanto, un tipo de números que no pueden ser asignados por fracciones y que son, no obstante, cantidades determinadas*. La raíz cuadrada de 12 proporciona un ejemplo de esto. A esta nueva especie de números le llamamos *números irracionales*, y tienen lugar cuando intentamos encontrar la raíz cuadrada de un número que no es un cuadrado. Así, en 2, al no ser un cuadrado perfecto, la raíz cuadrada de 2, o el número que multiplicado por sí mismo produce 2, es una cantidad irracional. A estos números también se les llama *inconmensurables*.

129. Estas cantidades irracionales, aunque no pueden ser expresadas por fracciones, son magnitudes de las cuales podemos formarnos una idea precisa, porque no obstante qué tan oculta pueda parecer la raíz cuadrada de 12, por ejemplo, sabemos que debe ser un número que, multiplicado por sí mismo, produzca exactamente 12, y esta propiedad es suficiente para darnos una idea del número, ya que está en nuestras manos el aproximarnos a su valor de manera continua.

130. Como ya estamos lo suficientemente familiarizados con la naturaleza de los números irracionales bajo nuestra consideración presente, se ha acordado un signo particular para expresar las raíces cuadradas de todos los números que no son cuadrados perfectos. Este signo se escribe como √ y se lee como *raíz cuadrada*. De esta forma, $\sqrt{12}$ representa la raíz cuadrada de 12 o el número que, multiplicado por sí mismo, produce 12. $\sqrt{2}$ representa la raíz cuadrada de 2, $\sqrt{3}$ la de 3, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ la de $\frac{2}{3}$ y, en general, $\sqrt{a}$ *representa la raíz cuadrada del número a*. Así que cuando expresemos la raíz cuadrada de

un número que no es un cuadrado, sólo necesitamos hacer uso del signo √ poniéndolo antes del número.

131. La explicación que hemos dado de los números irracionales inmediatamente nos permitirá aplicarles métodos bien conocidos del cálculo. Sabiendo que la raíz cuadrada de 2 multiplicada por sí misma debe producir 2, también sabemos que la multiplicación $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$ necesariamente debe producir 2; que, de igual manera, la multiplicación $\sqrt{3}$ por $\sqrt{3}$ debe dar 3; que $\sqrt{5}$ por $\sqrt{5}$ hace 5; que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ por $\sqrt{\frac{2}{3}}$ da $\frac{2}{3}$ y que, en general, $\sqrt{a}$ *multiplicado por* $\sqrt{a}$ *produce a*.

132. *Pero cuando se requiere multiplicar* $\sqrt{a}$ *por* $\sqrt{b}$, *el producto será* $\sqrt{ab}$, porque ya vimos que si un cuadrado tiene dos o más factores, su raíz debe estar compuesta de las raíces de tales factores. Por eso encontramos la raíz cuadrada del producto *ab*, que es $\sqrt{ab}$, al multiplicar la raíz cuadrada de *a* o $\sqrt{a}$ por la raíz cuadrada de *b* o $\sqrt{b}$. De esto es evidente que si *b* fuese igual a *a*, tendríamos $\sqrt{aa}$ para el producto de $\sqrt{a}$ por $\sqrt{b}$. Ahora bien, $\sqrt{aa}$ es evidentemente *a*, porque *aa* es el cuadrado de *a*.

133. En la división, si se requiriese dividir $\sqrt{a}$ entre $\sqrt{b}$, por ejemplo, obtenemos $\sqrt{\frac{a}{b}}$, y en este ejemplo la irracionalidad puede desvanecerse en el cociente. Así, teniendo que dividir $\sqrt{18}$ entre $\sqrt{8}$, el cociente es $\sqrt{\frac{18}{8}}$, que se reduce a $\sqrt{\frac{9}{4}}$ y consecuentemente a $\frac{3}{2}$, porque $\frac{9}{4}$ es el cuadrado de $\frac{3}{2}$.

134. Cuando el número ante el cual hemos puesto el signo radical √ es en sí mismo un cuadrado, su raíz se expresa en la forma habitual. Así, $\sqrt{4}$ es lo mismo que 2, $\sqrt{9}$ es lo mismo que 3, $\sqrt{36}$ lo mismo que 6, y $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ lo mismo que $\frac{7}{2}$ o $3\frac{1}{2}$. En estos casos la irracionalidad sólo es aparente, y desde luego desaparece.

135. También es fácil multiplicar números irracionales por números ordinarios. Por ejemplo, *2 multiplicado por* $\sqrt{5}$ *da* $2\sqrt{5}$, y 3 veces $\sqrt{2}$ hace $3\sqrt{2}$. En el segundo

ejemplo, sin embargo, como 3 es igual a $\sqrt{9}$, también podemos expresar 3 veces $\sqrt{2}$ como $\sqrt{9}$ multiplicado por $\sqrt{2}$, o como $\sqrt{18}$. Así que $2\sqrt{a}$ es lo mismo que $\sqrt{4a}$, y $3\sqrt{a}$ lo mismo que $\sqrt{9a}$. Y, en general, *$b\sqrt{a}$ tiene el mismo valor que la raíz cuadrada de bba, o* $\sqrt{abb}$, de donde inferimos recíprocamente que cuando el número precedido por el signo radical contiene un cuadrado, podemos tomar la raíz de tal cuadrado y ponerla antes del signo tal como lo haríamos al escribir $b\sqrt{a}$ en lugar de $\sqrt{bba}$. Después de esto, las siguientes reducciones serán fácilmente comprendidas:

$\sqrt{8}$ o $\sqrt{2\cdot 4}$ es igual a $2\sqrt{2}$;

$\sqrt{12}$ o $\sqrt{3\cdot 4}$ $2\sqrt{3}$;

$\sqrt{18}$ o $\sqrt{2\cdot 9}$ $3\sqrt{2}$;

$\sqrt{24}$ o $\sqrt{6\cdot 4}$ $2\sqrt{6}$;

$\sqrt{32}$ o $\sqrt{2\cdot 16}$ $4\sqrt{2}$;

$\sqrt{75}$ o $\sqrt{3\cdot 25}$ $5\sqrt{3}$, y así sucesivamente.

136. La división está fundada sobre los mismos principios. $\sqrt{a}$ dividido entre $\sqrt{b}$ da $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, o $\sqrt{\frac{a}{b}}$. De igual forma,

$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ es igual a $\sqrt{\frac{8}{2}}$, o $\sqrt{4}$, o 2;

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $\sqrt{\frac{18}{2}}$, o $\sqrt{9}$, o 3;

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{\frac{12}{3}}$, o $\sqrt{4}$, o 2.

Además, $\frac{2}{\sqrt{2}}$ es igual a $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, o $\sqrt{\frac{4}{2}}$, o $\sqrt{2}$;

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, o $\sqrt{\frac{9}{3}}$, o $\sqrt{3}$;

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, o $\sqrt{\frac{144}{6}}$, o $\sqrt{24}$, o $\sqrt{6\cdot 4}$, o, por último, $2\sqrt{6}$.

137. No hay nada particular a observarse con respecto a la adición y sustracción de tales cantidades, porque sólo las conectamos por los signos + y -. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ *añadido a* $\sqrt{3}$ *se escribe como* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, *y* $\sqrt{3}$ *sustraído de* $\sqrt{5}$ *se escribe como* $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

138. Por último hemos de notar que para distinguir los números irracionales, a todos los otros números, tanto enteros como fraccionales, los llamamos *números racionales*. Así que cuando hablemos de números racionales debemos entender enteros o fracciones.

CAPÍTULO XIII

DE CANTIDADES IMPOSIBLES O IMAGINARIAS QUE SURGEN DE LA MISMA FUENTE

139. Ya hemos visto que los cuadrados de los números, tanto negativos como positivos, son siempre positivos o están afectados por el signo +, habiendo mostrado que $-a$ multiplicado por $-a$ da $+aa$, lo mismo que el producto de $+a$ por $+a$. Por eso es que en el capítulo anterior supusimos que todos los números de los cuales requerimos extraer raíces cuadradas eran positivos.

140. Es por esto que cuando se requiere extraer la raíz de un número negativo surge una gran dificultad, porque no hay número asignable alguno cuyo cuadrado sea una cantidad negativa. Supongamos, por ejemplo, que queremos extraer la raíz de -4; para esto requerimos un número tal que cuando sea multiplicado por sí mismo produzca -4. Ahora, este número no es ni $+2$ ni -2, porque el cuadrado, tanto de $+2$ como de -2, es $+4$ y no -4.

141. Debemos concluir, pues, que *la raíz cuadrada de un número negativo no puede ser un número positivo ni un número negativo*, ya que los cuadrados de los números negativos también toman el signo *más*. Consecuentemente, la raíz en cuestión debe pertenecer a una especie de números completamente distinta, ya que no puede clasificarse ni entre los números positivos ni entre los negativos.

142. Ahora bien, antes observamos que los números positivos son todos mayores que nada o que 0 y que los números negativos son todos menores que nada o que 0, de tal

forma que cualquier cosa que exceda a 0 se expresa con números positivos y cualquier cosa que sea menor que 0 se expresa con números negativos. Las raíces cuadradas de los números negativos no son, por lo tanto, ni mayores ni menores que nada. Pero tampoco podemos decir que son 0, porque 0 multiplicado por 0 produce 0, y consecuentemente no produce un número negativo.

143. Ahora, como todos los números que es posible concebir son o mayores o menores que 0, o son el mismo 0, es evidente que no podemos clasificar la raíz cuadrada de un número negativo entre los números posibles, y entonces debemos decir que es una cantidad imposible. De esta forma llegamos a la idea de los números que, por su naturaleza, son imposibles. *A estos números suele llamárseles cantidades imaginarias*, porque sólo existen en la imaginación.

144. Todas las expresiones del tipo $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-4}$, etc., son, consecuentemente, números imposibles o imaginarios porque representan raíces de cantidades negativas; y de tales números podemos realmente afirmar que no son ni nada, ni mayores que nada, ni menores que nada, lo que necesariamente los hace imaginarios o imposibles.

145. A pesar de todo lo anterior, estos números se presentan a la mente; existen en nuestra imaginación y tenemos una idea suficiente de ellos, porque sabemos que $\sqrt{-4}$ se refiere a un número que, multiplicado por sí mismo, da -4. También es por esto que nada nos impide hacer uso de estos números imaginarios y de emplearlos en el cálculo.

146. La primera idea que tiene lugar en este tema es que el cuadrado de $\sqrt{-3}$, por ejemplo, o el producto de $\sqrt{-3}$ por $\sqrt{-3}$ debe ser -3; que el producto de $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$ es -1, y que en general al multiplicar $\sqrt{-a}$ por $\sqrt{-a}$, o al tomar el cuadrado de $\sqrt{-a}$, obtenemos $-a$.

147. Ahora, como $-a$ es igual a $+a$ multiplicado por -1, y como la raíz cuadrada de un producto se encuentra multiplicando las raíces de sus factores, se sigue que la raíz de a multiplicada por -1, o $\sqrt{-a}$, es igual a $\sqrt{a}$ multiplicado por $\sqrt{-1}$. Ahora bien, $\sqrt{a}$ es un número posible o real, y consecuentemente *toda la imposibilidad de una cantidad imaginaria siempre puede reducirse a* $\sqrt{-1}$. Por esta razón, $\sqrt{-4}$ es igual a $\sqrt{4}$

multiplicado por $\sqrt{-1}$ y a $2\sqrt{-1}$, dado que $\sqrt{4}$ es igual a 2. Por la misma razón, $\sqrt{-9}$ se reduce a $\sqrt{9}\times\sqrt{-1}$ o a $3\sqrt{-1}$, y $\sqrt{-16}$ es igual a $4\sqrt{-1}$.

148. Por otra parte, como $\sqrt{a}$ multiplicado por $\sqrt{b}$ hace $\sqrt{ab}$, tendremos $\sqrt{6}$ para el valor de $\sqrt{-2}$ multiplicado por $\sqrt{-3}$, y $\sqrt{4}$ o 2 para el valor del producto de $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-4}$. Vemos, entonces, que *dos números imaginarios multiplicados juntos producen un número real o posible*. Pero, por el contrario, *un número posible multiplicado por uno imposible da siempre un producto imaginario*; así, $\sqrt{-3}$ por $\sqrt{+5}$ da $\sqrt{-15}$.

149. Con respecto a la división es lo mismo, porque $\sqrt{a}$ dividido entre $\sqrt{b}$ haciendo $\sqrt{\frac{a}{b}}$, es evidente que $\sqrt{-4}$ dividido entre $\sqrt{-1}$ dará $\sqrt{+4}$ o 2, que $\sqrt{+3}$ dividido entre $\sqrt{-3}$ dará $\sqrt{-1}$, y que 1 dividido entre $\sqrt{-1}$ da $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ o $\sqrt{-1}$, porque 1 es igual a $\sqrt{+1}$.

150. Antes hemos observado que la raíz cuadrada de cualquier número siempre tiene dos valores, uno positivo y otro negativo; que $\sqrt{4}$, por ejemplo, es tanto $+2$ como -2, y que, en general, debemos tomar tanto $-\sqrt{a}$ como $+\sqrt{a}$ para la raíz cuadrada de *a*. Esta observación también aplica a los números imaginarios: *la raíz cuadrada de $-a$ es tanto $+\sqrt{-a}$ como $-\sqrt{-a}$, pero no debemos confundir los signos + y - que se encuentran antes del signo radical √ con el signo que viene después de él*.

151. Nos queda eliminar cualquier duda que pueda quedar con respecto a la utilidad de los números que hemos estado considerando, porque tales números siendo imposibles, no sería sorprendente si alguien los considerara totalmente inútiles, y a todo este tema lo considerara sólo una especulación ociosa. Esto, sin embargo, no es el caso. El cálculo de cantidades imaginarias es de la mayor importancia. A menudo surgen cuestiones de las cuales no podemos decir de inmediato si incluyen cualquier cosa real o posible o no. Ahora bien, cuando la solución de tal cuestión conduce a números imaginarios, estamos seguros de que lo que se requiere es imposible.

Para ilustrar esto con un ejemplo, supongamos que se propone dividir el número 12 en dos partes tales que su producto sea 40. Si resolvemos esta cuestión por las reglas

ordinarias, encontramos que las partes buscadas son $6+\sqrt{-4}$ y $6-\sqrt{-4}$; pero estos números siendo imaginarios, concluimos que es imposible resolver la cuestión. La diferencia será fácilmente percibida si suponemos que la cuestión hubiese sido dividir 12 en dos partes tales que multiplicadas juntas produzcan 35, porque es claro que tales partes deben ser 7 y 5.

CAPÍTULO XIV

DE LOS NÚMEROS CÚBICOS

152. *Cuando un número ha sido multiplicado tres veces por sí mismo o, lo que es lo mismo, cuando el cuadrado de un número ha sido multiplicado una vez más por tal número, obtenemos un producto llamado cubo o número cúbico*. Así, el cubo de *a* es *aaa*, porque es el producto obtenido al multiplicar *a* por sí mismo, o por *a*, y ese cuadrado *aa* de nuevo por *a*.

Los cubos de los números naturales se suceden entre sí en el siguiente orden:

Números	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

153. Si consideramos las diferencias de tales cubos, tal como lo hicimos con [las diferencias de] los cuadrados, i. e., sustrayendo cada cubo de aquel que viene después de él, obtenemos la siguiente serie de números:

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271.

A primera vista no observamos regularidad alguna entre ellos, pero si tomamos sus respectivas diferencias, encontramos la siguiente serie:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60,

en donde los términos, como es evidente, aumentan siempre en 6.

154. Después de la definición que hemos dado a un cubo, no será difícil encontrar los cubos de números fraccionales: $\frac{1}{8}$ es el cubo de $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{27}$ es el cubo de $\frac{1}{3}$, y $\frac{8}{27}$ es el

cubo de $\frac{2}{3}$. De la misma manera, sólo tenemos que tomar el cubo del numerador y el del denominador por separado, y tendremos $\frac{27}{64}$ para el cubo de $\frac{3}{4}$.

155. Si se requiriese *encontrar el cubo de un número mixto, primero debemos reducirlo a una fracción individual y después proceder en la forma descrita*. Para encontrar, por ejemplo, el cubo de $1\frac{1}{2}$, debemos tomar el de $\frac{3}{2}$, que es $\frac{27}{8}$ o 3 y $\frac{3}{8}$. Así que el cubo de $1\frac{1}{4}$ o de la fracción individual $\frac{5}{4}$ es $\frac{125}{64}$ o $1\frac{61}{64}$, y el cubo de $3\frac{1}{4}$ o de $\frac{13}{4}$ es $\frac{2197}{64}$ o $34\frac{21}{64}$.

156. Como *aaa* es el cubo de *a*, el de *ab* será *aaabbb*, por lo cual vemos que *si un número tiene dos o más factores, podemos encontrar su cubo multiplicando juntos los cubos de tales factores*. Por ejemplo, como 12 es igual a 3×4, multiplicamos el cubo de 3, que es 27, por el cubo de 4, que es 64, y obtenemos 1728, el cubo de 12. Además, el cubo de $2a$ es $8aaa$, y consecuentemente 8 veces más grande que el cubo de *a*; e igualmente, el cubo de $3a$ es $27aaa$, esto es, 27 veces más grande que el cubo de *a*.

157. *Tratemos también aquí los signos + y -*. Es evidente que el cubo de un número positivo $+a$ también debe ser positivo, esto es, $+aaa$. Pero si debemos cubicar un número negativo $-a$, lo conseguimos tomando primero el cuadrado, que es $+aa$, y después multiplicándolo, de acuerdo con la regla, por $-a$, lo que da $-aaa$ por el cubo requerido. *A este respecto,* por lo tanto, *no es lo mismo con los números cúbicos que con los cuadrados, porque los últimos siempre son positivos mientras que el cubo de* -1 *es* -1, *el de* -2 *es* -8, *el de* -3 *es* -27, *y así sucesivamente*.

CAPÍTULO XV

DE LAS RAÍCES CÚBICAS Y DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES QUE RESULTAN DE ELLAS

158. Así como podemos encontrar, de la manera recién expuesta, el cubo de un número dado, de igual manera, cuando se propone un número, podemos encontrar

recíprocamente un número que multiplicado tres veces por sí mismo produzca aquel número propuesto. Al número buscado aquí se le llama, en relación con el otro, *raíz cúbica*. *Así que la raíz cúbica de un número dado es el número cuyo cubo es igual a tal número dado*.

159. Es fácil, por lo tanto, determinar la raíz cúbica cuando el número propuesto es un cubo real, tal como en los ejemplos del último capítulo. Y esto porque fácilmente percibimos que la raíz cúbica de 1 es 1, la de 8 es 2, la de 27 es 3, la de 64 es 4, y así sucesivamente. Y, de la misma manera, la raíz cúbica de -27 es -3 y la de -125 es -5.

Además, si el número propuesto es una fracción, como en $\frac{8}{27}$, su raíz cúbica debe ser $\frac{2}{3}$, y la de $\frac{64}{343}$ es $\frac{4}{7}$. Por último, la raíz cúbica del número mixto $2\frac{10}{27}$ debe ser $\frac{4}{3}$ o $1\frac{1}{3}$, porque $2\frac{10}{27}$ es igual a $\frac{64}{27}$.

160. Pero si el número propuesto no es un cubo, su raíz cúbica no puede ser expresada ni por números enteros ni por números fraccionales. Por ejemplo, 43 no es un número cúbico, y yo digo, por lo tanto, que es imposible asignar algún número, entero o fraccional, cuyo cubo sea exactamente 43. Sin embargo, sí podemos afirmar que la raíz cúbica de tal número es mayor que 3 (porque el cubo de 3 es sólo 27) y menor que 4 (porque el cubo de 4 es 64). Sabemos, pues, que la raíz cúbica requerida se encuentra necesariamente contenida entre los números 3 y 4.

161. Como la raíz cúbica de 43 es mayor que 3, si añadimos una fracción a 3 es cierto que nos podemos aproximar cada vez más al valor verdadero de esta raíz; pero nunca podremos asignar el número que expresa tal valor de forma exacta, porque el cubo de un número mixto nunca puede ser perfectamente igual a un entero, tal como 43. Si supusiésemos, por ejemplo, que $3\frac{1}{2}$ o $\frac{7}{2}$ es la raíz cúbica requerida, el error sería $\frac{1}{8}$, porque el cubo de $\frac{7}{2}$ es $\frac{343}{8}$, o $42\frac{7}{8}$.

162. Esto muestra que *la raíz cúbica de 43 no puede expresarse de ninguna manera por enteros o por fracciones*. Sin embargo, tenemos una idea inconfundible de la magnitud de esta raíz, lo que nos induce a utilizar, para representarla, *el signo* $\sqrt[3]{\ }$, que ponemos

antes del número propuesto y que *se lee como raíz cúbica para distinguirla de la raíz cuadrada, que suele llamársele simplemente raíz*. Así, $\sqrt[3]{43}$ significa la raíz cúbica de 43, es decir, el número cuyo cubo es 43 o que multiplicado tres veces por sí mismo produce 43.

163. También es evidente que tales expresiones no pueden pertenecer a las cantidades racionales, y que más bien forman una especie particular de cantidades irracionales. No tienen nada en común con las raíces cuadradas, y no es posible expresar una raíz cúbica con una raíz cuadrada, como, por ejemplo, con $\sqrt{12}$, porque siendo 12 el cuadrado de $\sqrt{12}$, su cubo será $12\sqrt{12}$, todavía irracional, y tal no puede ser igual a 43.

164. Si el número propuesto es un cubo real, entonces nuestras expresiones se vuelven racionales: $\sqrt[3]{1}$ es igual a 1; $\sqrt[3]{8}$ es igual a 2; $\sqrt[3]{27}$ es igual a 3, y en general $\sqrt[3]{aaa}$ es igual a *a*.

165. *Si se propusiese multiplicar una raíz cúbica* $\sqrt[3]{a}$ *por otra* $\sqrt[3]{b}$, *el producto debe ser* $\sqrt[3]{ab}$, porque sabemos que la raíz cúbica de un producto *ab* se encuentra al multiplicar juntas las raíces cúbicas de los factores. De aquí que, también, *si dividimos* $\sqrt[3]{a}$ *entre* $\sqrt[3]{b}$ *el cociente será* $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166. Percibimos asimismo que $2\sqrt[3]{a}$ *es igual a* $\sqrt[3]{8a}$, porque 2 es equivalente a $\sqrt[3]{8}$; que $3\sqrt[3]{a}$ es igual a $\sqrt[3]{27a}$, y que $b\sqrt[3]{a}$ es igual a $\sqrt[3]{abbb}$. Así, recíprocamente, si el número bajo el signo radical tiene un factor que es un cubo, podemos hacerlo desaparecer al poner su raíz cúbica antes del signo [radical]. Por ejemplo, en lugar de $\sqrt[3]{64a}$ podemos escribir $4\sqrt[3]{a}$, y $5\sqrt[3]{a}$ en lugar de $\sqrt[3]{125a}$. Por consiguiente, $\sqrt[3]{16}$ es igual a $2\sqrt[3]{2}$, porque 16 es igual a 8 por 2.

167. Cuando el número propuesto es negativo, su raíz cúbica no está sujeta a las mismas dificultades que tuvieron lugar al tratar las raíces cuadradas. Porque, como los cubos de los números negativos son negativos, se sigue que las raíces cúbicas de los números negativos sólo pueden ser negativas. Así, $\sqrt[8]{-8}$ es igual a -2, y $\sqrt[3]{-27}$ [es igual] a -3. También se sigue que $\sqrt[3]{-12}$ es lo mismo que $-\sqrt[3]{12}$ y que $\sqrt[3]{-a}$ puede expresarse por $-\sqrt[3]{a}$. De aquí vemos que el signo -, cuando está después del signo de la raíz cúbica,

también puede ser puesto antes que él. De aquí no llegamos, por tanto, a los números imposibles o imaginarios que tuvieron lugar al considerar las raíces cuadradas de los números negativos.

CAPÍTULO XVI

DE LAS POTENCIAS EN GENERAL

168. *Al producto que obtenemos al multiplicar un número varias veces por sí mismo se le llama potencia*. Así, el cuadrado que surge de la multiplicación de un número por sí mismo, y el cubo que obtenemos al multiplicar un número tres veces por sí mismo, son potencias. *También decimos, en el primer caso, que el número está elevado al segundo grado o a la segunda potencia, y en el último, que el número está elevado al tercer grado o a la tercera potencia*.

169. Distinguimos estas potencias entre sí por el número de veces que el número dado ha sido multiplicado por sí mismo. Por ejemplo, al cuadrado se le llama segunda potencia porque un cierto número dado ha sido multiplicado dos veces por sí mismo, y si un número ha sido multiplicado tres veces por sí mismo, llamamos tercera potencia al producto, que por tanto significa lo mismo que el cubo. Si multiplicamos un número cuatro veces por sí mismo, tendremos su cuarta potencia o lo que suele llamarse su *bicuadrado*. De lo dicho será fácil comprender qué se quiere decir con quinta, sexta, séptima potencia, etc., de un número. Sólo queda añadir que los nombres de estas potencias, después del cuarto grado, dejan de tener cualquier otra distinción excepto estas [distinciones] numerales.

170. Para ilustrar esto todavía mejor podemos observar, en primer lugar, que *las potencias de 1 permanecen siempre iguales*, porque por cualquier número de veces que multipliquemos 1 por sí mismo, el producto siempre será 1. Podemos, pues, empezar por representar las potencias de 2 y de 3. Éstas se suceden en el siguiente orden:

Potencias	*Del número 2*	*Del número 3*
I	2	3
II	4	9
III	8	27
IV	16	81

V	32	243
VI	64	729
VII	128	2187
VIII	256	6561
IX	512	19683
X	1024	59049
XI	2048	177147
XII	4096	531441
XIII	8192	1594323
XIV	16384	4782969
XV	32768	14348907
XVI	65536	43046721
XVII	131072	129140163
XVIII	262144	387420489

Sin embargo, las potencias más notables son las del número 10, porque sobre éstas se funda el sistema de nuestra aritmética. Unas cuantas de ellas recorridas en orden, comenzando con la primera, son como sigue:

I	II	III	IV	V	VI
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000, etc.

171. Para ilustrar este tema y para considerarlo de una manera más general, podemos observar que las potencias de cualquier número *a* se suceden entre sí en el siguiente orden:

I	II	III	IV	V	VI
a	*aa*	*aaa*	*aaaa*	*aaaaa*	*aaaaaa*, etc.

Pero en seguida vemos la inconveniencia de ocuparnos así de las potencias, consistente en la necesidad de repetir la misma letra muy seguido para expresar potencias grandes. El lector también se vería en dificultades si estuviera obligado a contar todas las letras para saber qué potencia se quiere representar. La centésima potencia, por ejemplo, no podría ser convenientemente escrita de esta manera, y sería aún más difícil leerla.

172. Para eludir esta inconveniencia se ha ideado un método mucho más cómodo para tratar con tales potencias y que por su amplio uso requiere ser cuidadosamente

explicado. Así, por ejemplo, para expresar la centésima potencia simplemente escribimos el número 100 arriba y un poco a la derecha del número cuya centésima potencia expresaríamos: a^{100} significa *a* elevado a 100, y *representa la centésima potencia de a*. Debemos observar que *nombramos exponente al número escrito arriba* [*y a la derecha*] *de aquel* [*número*] *cuya potencia o grado representa, y que en este caso es 100*.

173. De igual forma, a^2 significa *a* elevado a 2 o la segunda potencia de *a*, que a veces representamos también como *aa* porque ambas expresiones se escriben y comprenden con la misma facilidad. Pero para expresar el cubo o la tercera potencia *aaa* escribimos a^3 de acuerdo con la regla según la cual podemos ocupar menos espacio. Así que a^4 significa la cuarta potencia, a^5 la quinta potencia, y a^6 la sexta potencia de *a*.

174. En pocas palabras, todas las potencias de *a* estarán representadas por $a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}$, etc. De esto vemos que pudimos haber escrito muy propiamente a^1 en lugar de *a* para el primer término y así mostrar el orden de la serie de forma más clara. En realidad, a^1 *no es más que a, porque esta unidad muestra que la letra a ha de ser escrita sólo una vez*. A una serie de potencias de este tipo también se le llama progresión geométrica, porque cada término es mayor que el precedente por uno.

175. Como en esta serie de potencias encontramos cada término al multiplicar el término precedente por *a* (lo que incrementa el exponente en 1), también podemos encontrar, con cualquier término dado, el término precedente si dividimos entre *a*, porque esto disminuye el exponente en 1. Esto muestra que el término que precede al primer término a^1 necesariamente debe ser $\frac{a}{a}$ o 1. Ahora bien, si procedemos de acuerdo con los exponentes, inmediatamente concluimos que el término que precede al primero debe ser a^0. De esto deducimos esta notable propiedad: a^0 *es constantemente igual a 1 sin importar qué tan grande o pequeño sea el valor de a*, e incluso cuando *a* es nada; esto es, a^0 es igual a 1.[1]

176. Podemos continuar nuestra serie de potencias en un orden retrógrado y de dos formas distintas: primero, dividiendo siempre entre *a*; segundo, disminuyendo el exponente en una unidad. Es evidente que ya sea que sigamos una u otra de estas formas, los términos

[1] Esto es, $0^0 = 1$. Nota del Traductor.

son perfectamente iguales. Esta serie decreciente está representada, en ambas de sus formas, en la siguiente tabla que debe leerse al revés, o de derecha a izquierda:

$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177. Ahora hemos llegado al conocimiento de las potencias cuyos exponentes son negativos, y somos capaces de asignar el valor preciso de tales potencias. De lo que hemos dicho, parece que

a^0 es igual a 1; entonces

a^{-1} es igual a $\frac{1}{a}$;

a^{-2} $\frac{1}{aa}$ o $\frac{1}{a^2}$;

a^{-3} $\frac{1}{a^3}$;

a^{-4} $\frac{1}{a^4}$, etc.

178. A partir de la notación anterior será fácil encontrar *las potencias de un producto ab. Éstas deben ser evidentemente ab o* $a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5$, *etc. Y de igual forma se encuentran las potencias de fracciones; por ejemplo, las de* $\frac{a}{b}$ *son* $\frac{a^1}{b^1}, \frac{a^2}{b^2}, \frac{a^3}{b^3}, \frac{a^4}{b^4}, \frac{a^5}{b^5}, \frac{a^6}{b^6}, \frac{a^7}{b^7}$, *etc.*

179. Por último, tenemos que considerar las potencias de números negativos. Supongamos que el número dado es $-a$; entonces sus potencias formarán la siguiente serie: $-a, +aa, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6$, etc. Podemos observar que sólo se vuelven negativas las

potencias cuyos exponentes son números nones y que, por el contrario, todas las potencias que tienen un número par por exponente son positivas. Así que la tercera, la quinta, la séptima, la novena, etc., potencias tienen todas el signo -, y la segunda, la cuarta, la sexta, la octava, etc., potencias están afectadas por el signo +.

CAPÍTULO XVII

DEL CÁLCULO DE POTENCIAS

180. No tenemos nada particular que observar con respecto a la adición y sustracción de potencias, porque sólo representamos estas operaciones por medio de los signos + y - cuando las potencias son distintas. Por ejemplo, $a^3 + a^2$ *es la suma de la segunda y tercera potencias de a, y* $a^5 - a^4$ *es lo que queda cuando sustraemos la cuarta potencia de a de la quinta potencia de a, y ninguno de estos resultados puede ser reducido.* Cuando tenemos potencias del mismo tipo o grado, es claramente innecesario conectarlas con signos; $a^3 + a^3$ da $2a^3$, etc.

181. Sin embargo, en la multiplicación de potencias varias cosas requieren nuestra atención. Primero, cuando requerimos multiplicar cualquier potencia de *a* por *a*, obtenemos la potencia que le sucede; es decir, la potencia cuyo exponente es mayor en una unidad. Así, a^2 multiplicado por *a* produce a^3, y a^3 multiplicado por *a* produce a^4. Y, de igual forma, cuando requerimos multiplicar por *a* las potencias de tal número con exponentes negativos, debemos añadir 1 al exponente. Así, a^{-1} *multiplicado por a produce* a^0 *o 1*, lo que se hace más evidente si consideramos que a^{-1} es igual a $\frac{1}{a}$ y que, siendo $\frac{a}{a}$ el producto de $\frac{1}{a}$ por *a*, es consecuentemente igual a 1. Del mismo modo, a^{-2} multiplicado por *a* produce a^{-1} o $\frac{1}{a^1}$, y a^{-10} multiplicado por *a* da a^{-9}, y así sucesivamente.

182. Si requerimos multiplicar una potencia de *a* por *aa* o por la segunda potencia, yo digo que el exponente se vuelve más grande en 2. De esta forma, el producto de a^2 por a^2 es a^4; el de a^2 por a^3 es a^5; el de a^4 por a^2 es a^6, y que, de manera más general, a^n *multiplicado por* a^2 *hace* a^{n+2}. *Con respecto a los exponentes negativos, tendremos* a^1 *o*

a para el producto de a^{-1} *por* a^2, porque a^{-1} siendo igual a $\frac{1}{a}$, es lo mismo que si hubiésemos dividido *aa* entre *a*; consecuentemente, el producto requerido es $\frac{aa}{a}$, o *a*. Así, a^{-2} *multiplicado por* a^2 *produce* a^0 *o 1, y* a^{-3} *multiplicado por* a^2 *produce* a^{-1}.

183. No es menos evidente que para multiplicar cualquier potencia de *a* por a^3, debemos incrementar su exponente en tres unidades, y que consecuentemente el producto de a^n por a^3 es a^{n+3}. Y *cada vez que se requiera multiplicar dos potencias de a, el producto será también una potencia de a, y una potencia cuyo exponente será la suma de los exponentes de las dos potencias dadas*. Por ejemplo, a^4 multiplicado por a^5 dará a^9, y a^{12} multiplicado por a^7 dará a^{19}, etc.

184. Desde estas consideraciones podemos determinar fácilmente potencias más grandes. Para encontrar, por ejemplo, la vigésimo cuarta potencia de 2, multiplicamos la doceava potencia por la doceava potencia, porque 2^{24} es igual a $2^{12} \times 2^{12}$. Ya vimos que 2^{12} es 4096; yo digo, por tanto, que el número 16777216, o el producto de 4096 por 4096, expresa la potencia requerida 2^{24}.

185. Pasemos a la división. Debemos notar, en primer lugar, que *para dividir una potencia de a entre a debemos sustraer 1 del exponente, o disminuirlo en una unidad*. Así, a^5 dividido entre *a* da a^4; a^0 o 1 dividido entre *a* es igual a a^{-1} o a $\frac{1}{a}$, y a^{-3} dividido entre *a* da a^{-4}.

186. Si tenemos que dividir una potencia dada de *a* entre a^2, debemos disminuir el exponente en 2, y si es entre a^3, debemos sustraer tres unidades del exponente de la potencia propuesta. Así que, *en general, sea cual sea la potencia de a requerida para ser dividida entre otra potencia de a, la regla siempre es sustraer el exponente de la segunda del exponente de la primera de estas potencias*. Así, a^{15} dividido entre a^7 dará a^8; a^6 dividido entre a^7 dará a^{-1}, y a^{-3} dividido entre a^4 dará a^{-7}.

187. De lo dicho arriba es fácil comprender el método para encontrar las potencias de potencias. Esto se hace mediante la multiplicación. Cuando buscamos, por ejemplo, el cuadrado o la segunda potencia de a^3, encontramos a^6, y del mismo modo encontramos

a^{12} para la tercera potencia o el cubo de a^4. *Para obtener el cuadrado de una potencia, sólo tenemos que duplicar su exponente; para su cubo, debemos triplicar su exponente, y así sucesivamente*. El cuadrado de a^n es a^{2n}; su cubo es a^{3n}; su séptima potencia es a^{7n}, etc.

188. Siendo a^4 el cuadrado de a^2 o el cuadrado del cuadrado de *a*, podemos ver por qué a la cuarta potencia se le llama *bicuadrado*. El cuadrado de a^3 es a^6, y por tanto la sexta potencia ha recibido el nombre de *cuadrado al cubo*. Por último, siendo a^9 el cubo de a^3, a la novena potencia la llamamos *cubo al cubo*. No se han introducido más denominaciones de este tipo para las potencias, y en realidad las últimas dos son muy poco comunes.

CAPÍTULO XVIII

DE LAS RAÍCES EN RELACIÓN CON LAS POTENCIAS EN GENERAL

189. Como la raíz cuadrada de un número dado es un número cuyo cuadrado es igual a tal número dado, y como la raíz cúbica de un número dado es un número cuyo cubo es igual a tal número dado, se sigue que de cualquier número que nos sea dado siempre podemos indicar sus raíces de tal forma que su cuarta o quinta, o cualquier otra potencia, sea igual al número dado. Para distinguir mejor estos distintos tipos de raíces, llamaremos *segunda raíz* a la raíz cuadrada y *tercera raíz* a la raíz cúbica, porque, de acuerdo con esta denominación, podemos llamar *cuarta raíz* a aquella cuyo bicuadrado es igual a un número dado, y *quinta raíz* a aquella cuya quinta potencia es igual a un número dado, y así sucesivamente.

190. Como la raíz cuadrada o segunda está marcada por el signo $\sqrt{\ }$ y la raíz cúbica o tercera por el signo $\sqrt[3]{\ }$, la cuarta raíz está representada por el signo $\sqrt[4]{\ }$, la quinta por $\sqrt[5]{\ }$, y así sucesivamente, es evidente que, de acuerdo con este método de expresión, el signo de la raíz cuadrada debe ser $\sqrt[2]{\ }$. Pero debido a que de todas las raíces esta última es la que ocurre con más frecuencia, se ha acordado, por razones de brevedad, omitir el número 2 en

el signo de esta raíz. Así que cuando un signo radical no tiene ningún número antepuesto, esto siempre muestra que por ello debe entenderse raíz cuadrada.

191. Para explicar esto todavía más, mostraremos a continuación las distintas raíces del número *a* con sus respectivos valores:

$\sqrt{a}$	es la	*segunda*	raíz de	*a*,
$\sqrt[3]{a}$	es la	*tercera*	raíz de	*a*,
$\sqrt[4]{a}$		*cuarta*		*a*,
$\sqrt[5]{a}$		*quinta*		*a*,
$\sqrt[6]{a}$		*sexta*		*a*, y así sucesivamente.

A la inversa:

La segunda	potencia de	$\sqrt{a}$	es igual a	*a*,
la tercera	potencia de	$\sqrt[3]{a}$	es igual a	*a*,
la cuarta		$\sqrt[4]{a}$		*a*,
la quinta		$\sqrt[5]{a}$		*a*,
la sexta		$\sqrt[6]{a}$		*a*,

y así sucesivamente.

192. Por lo tanto, ya sea que el número *a* sea grande o pequeño, sabemos qué valor atribuir a todas estas raíces de distintos grados. También debemos observar que si sustituimos una unidad por *a*, todas estas raíces serán constantemente 1, porque todas las potencias de 1 tienen una unidad como valor. Si el número *a* es mayor que 1, todas sus raíces también excederán la unidad. Por último, si tal número es menor que 1, todas sus raíces también serán menores que la unidad.

193. Si el número *a* es positivo sabemos, por lo que hemos dicho sobre las raíces cuadradas y cúbicas, que todas las otras raíces pueden determinarse y que serán números reales y posibles. Pero si el número *a* es negativo, su segunda, cuarta, sexta, y todas las raíces pares se vuelven números imposibles o imaginarios, porque *todas las potencias pares, ya sean de números positivos o negativos, están afectadas por el signo +; mientras que la tercera, quinta, séptima, y todas las raíces nones se vuelven negativas* pero racionales, porque las potencias nones de los números negativos son también negativas.

194. Aquí también tenemos una fuente inagotable de nuevos tipos de cantidades irracionales, porque siempre que el número *a* no sea realmente una potencia, como alguno de los índices anteriores representa o parece requerir, es imposible expresar tal raíz en números enteros o en fracciones y, consecuentemente, debe ser clasificada entre los números llamados irracionales.

CAPÍTULO XIX

DEL MÉTODO PARA REPRESENTAR NÚMEROS IRRACIONALES CON EXPONENTES FRACCIONALES

195. En el capítulo anterior vimos que el cuadrado de cualquier potencia se encuentra al duplicar el exponente de tal potencia y que, en general, el cuadrado o la segunda potencia de a^n es a^{2n}; y lo inverso también se sigue, esto es, que *la raíz cuadrada de la potencia* a^{2n} *es* a^n, y que *se encuentra al tomar la mitad del exponente de tal potencia o al dividirlo entre 2*.

196. De esta forma, la raíz cuadrada de a^2 es a^1, la de a^4 es a^2, la de a^6 es a^3, y así sucesivamente. En general, la raíz cuadrada de a^3 necesariamente debe ser $a^{\frac{3}{2}}$ y la de a^5 $a^{\frac{5}{2}}$. Consecuentemente, tendremos $a^{\frac{1}{2}}$ para la raíz cuadrada de a^1, de donde vemos que $a^{\frac{1}{2}}$ es igual a $\sqrt{a}$. Este nuevo método para representar la raíz cuadrada exige una atención especial.

197. También vimos que para encontrar el cubo de una potencia como a^n debemos multiplicar su exponente por 3, y que consecuentemente tal cubo es a^{3n}. Así que, a la inversa, cuando requerimos encontrar la raíz tercera o cúbica de la potencia a^{3n}, sólo tenemos que dividir su exponente entre 3, y podemos ciertamente concluir que la raíz requerida es a^n. Consecuentemente, a^1 o *a* es la raíz cúbica de a^3; a^2 es la de a^6; a^3 es la de a^9, y así sucesivamente.

198. No hay nada que nos impida aplicar el mismo razonamiento a aquellos casos en donde el exponente no es divisible entre 3, o de concluir que la raíz cúbica de a^2 es $a^{\frac{2}{3}}$,

o que la raíz cúbica de a^4 es $a^{\frac{4}{3}}$ o $a^{1\frac{1}{3}}$. Consecuentemente, la raíz tercera o cúbica de *a* o de a^1 debe ser $a^{\frac{1}{3}}$, de donde parece que $a^{\frac{1}{3}}$ es *igual* a $\sqrt[3]{a}$.

199. Es lo mismo con las raíces de grado más alto. La cuarta raíz de *a* será $a^{\frac{1}{4}}$, cuya expresión tiene el mismo valor que $\sqrt[4]{a}$. La quinta raíz de *a* será $a^{\frac{1}{5}}$, que es consecuentemente equivalente a $\sqrt[5]{a}$; y la misma observación puede extenderse a todas las raíces de grados más altos.

200. Podríamos, pues, abandonar por completo los signos radicales tal como se utilizan actualmente y emplear en su lugar los exponentes fraccionales que hemos venido explicando. Sin embargo, como estamos muy acostumbrados a tales signos y nos encontramos con ellos en todos los libros de álgebra, sería un error desterrarlos del cálculo. Pero también hay suficientes razones para emplear, como suele hacerse ahora, el otro método de notación, porque corresponde manifiestamente con la naturaleza de las cosas. En realidad, inmediatamente vemos que $a^{\frac{1}{2}}$ es la raíz cuadrada de *a* porque sabemos que el cuadrado de $a^{\frac{1}{2}}$, esto es, $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicado por $a^{\frac{1}{2}}$, es igual a a^1 o a *a*.

201. Lo que hemos dicho resulta suficiente para mostrar cómo hemos de entender todos los otros exponentes fraccionales que puedan tener lugar. Si tenemos, por ejemplo, $a^{\frac{4}{3}}$, esto significa que primero debemos tomar la cuarta potencia de *a* y después extrae su raíz cúbica o tercera, de tal forma que $a^{\frac{4}{3}}$ *es lo mismo que la expresión común* $\sqrt[3]{a^4}$. Para encontrar el valor de $a^{\frac{3}{4}}$, primero debemos tomar el cubo o la tercera potencia de *a*, que es a^3, y después extraer la cuarta raíz de esta potencia, así que $a^{\frac{3}{4}}$ es lo mismo que $\sqrt[4]{a^3}$. Igualmente, $a^{\frac{4}{5}}$ es igual a $\sqrt[5]{a^4}$, etc.

202. Cuando la fracción que representa al exponente excede la unidad, podemos expresar el valor de la cantidad dada de otra manera. Supongamos que es $a^{\frac{5}{2}}$. Esta cantidad es equivalente a $a^{2\frac{1}{2}}$, que es el producto de a^2 por $a^{\frac{1}{2}}$. Ahora, $a^{\frac{1}{2}}$ siendo igual a $\sqrt{a}$, es

evidente que $a^{\frac{5}{2}}$ es igual a $a^2\sqrt{a}$. Así, $a^{\frac{10}{3}}$, o $a^{3\frac{1}{3}}$, es igual a $a^3\sqrt[3]{a}$, y $a^{\frac{15}{4}}$, esto es, $a^{3\frac{3}{4}}$, expresa $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Estos ejemplos son suficientes para mostrar la gran utilidad de los exponentes fraccionales.

203. Su uso también se extiende a números fraccionales. Demos por sentado $\frac{1}{\sqrt{a}}$. Sabemos que esta cantidad es igual a $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Ahora bien, ya vimos que una fracción de la forma $\frac{1}{a^n}$ puede ser expresada como a^{-n}; así que, en lugar de $\frac{1}{\sqrt{a}}$, podemos utilizar la expresión $a^{-\frac{1}{2}}$. Del mismo modo, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ *es igual a* $a^{-\frac{1}{3}}$. De nuevo, si se propone la cantidad $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$, transformémosla en $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, que es el producto de a^2 por $a^{-\frac{3}{4}}$; ahora, este producto es equivalente a $a^{\frac{5}{4}}$ o a $a^{1\frac{1}{4}}$ o, por último, a $a^4\sqrt{a}$. La práctica entregará reducciones similares con facilidad.

204. Por último, debemos observar que cada raíz puede ser representada de distintas formas. Esto porque $\sqrt{a}$ siendo lo mismo que $a^{\frac{1}{2}}$, y $\frac{1}{2}$ siendo transformable en todas las fracciones $\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8},\frac{5}{10},\frac{6}{12}$, etc., es evidente que $\sqrt{a}$ *es igual* a $\sqrt[4]{a^2}$, y a $\sqrt[6]{a^3}$, y a $\sqrt[8]{a^4}$, y así sucesivamente. De igual forma, $\sqrt[3]{a}$, que es igual a $a^{\frac{1}{3}}$, será igual a $\sqrt[6]{a^2}$, y a $\sqrt[9]{a^3}$, y a $\sqrt[12]{a^4}$. E igualmente vemos que el número a o a^1 puede ser representado por las siguientes expresiones radicales: $\sqrt[2]{a^2},\sqrt[3]{a^3},\sqrt[4]{a^4},\sqrt[5]{a^5}$, etc.

205. Esta propiedad es de gran utilidad en la multiplicación y en la división, porque si tenemos que multiplicar $\sqrt[2]{a}$ por $\sqrt[3]{a}$, por ejemplo, escribimos $\sqrt[6]{a^3}$ en lugar de $\sqrt[2]{a}$ y $\sqrt[6]{a^2}$ en lugar de $\sqrt[3]{a}$, por lo que de esta manera obtenemos el mismo signo radical para ambas [expresiones], y la multiplicación llevada a cabo produce $\sqrt[6]{a^5}$. El mismo resultado

se deduce de $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, el producto de $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicado por $a^{\frac{1}{3}}$, porque $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ es $\frac{5}{6}$ y, consecuentemente, el producto requerido es $a^{\frac{5}{6}}$ o $\sqrt[6]{a^5}$.

Si tuviésemos que dividir $\sqrt[2]{a}$ *o* $a^{\frac{1}{2}}$ *entre* $\sqrt[3]{a}$ *o* $a^{\frac{1}{3}}$, *tendríamos* $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ *o* $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ *como cociente, es decir,* $a^{\frac{1}{6}}$ *o* $\sqrt[6]{a}$.

CAPÍTULO XX

DE LOS DISTINTOS MÉTODOS DE CALCULAR Y DE SU CONEXIÓN MUTUA

206. Hasta ahora sólo hemos explicado los distintos métodos de calcular: adición, sustracción, multiplicación, y división; la involución de las potencias, y la extracción de raíces. Sería apropiado, por lo tanto, rastrear el origen de estos distintos métodos y explicar la conexión subsistente entre ellos para así quedarnos satisfechos con la posibilidad o imposibilidad de otras operaciones. Esta investigación arrojará nueva luz sobre los temas que hemos considerado.

Al perseguir este objetivo, haremos uso de un nuevo carácter que podemos emplear en lugar de la expresión *es igual a* que tanto hemos repetido. Este signo es =, y se lee como *igual a*. Así, cuando escribo $a=b$, esto significa que *a* es igual a *b*; así, por ejemplo, $3\times 5=15$.

207. El primer modo de calcular que se presenta inmediatamente en la mente es, sin duda, la adición, por la cual añadimos dos números y encontramos su suma. Sean *a* y *b* dos números dados. Si su suma está expresada por la letra *c*, tendremos $a+b=c$. Así que cuando conocemos los dos números *a* y *b*, la adición nos enseña a encontrar el número *c*.

208. Conservando la comparación $a+b=c$, invirtamos la cuestión y preguntémonos cómo hemos de encontrar el número *b* si conocemos los números *a* y *c*. Requerimos, entonces, saber qué número ha de añadirse a *a* para que la suma sea el número *c*. Supongamos, por ejemplo, que $a=3$ y $c=8$; así, tenemos que $3+b=8$. Evidentemente, encontraremos *b* al sustraer 3 de 8. Así que, en general, para encontrar *b*

debemos sustraer *a* de *c*, de donde surge que $b = c - a$, porque al añadir *a* en ambos lados tenemos $b + a = c - a + a$, esto es, $= c$, tal como supusimos. Tal es, pues, el origen de la sustracción.

209. La sustracción tiene lugar cuando invertimos la cuestión que da lugar a la adición. Ahora el número que requerimos sustraer es mayor que aquel del cual ha de ser sustraído. Por ejemplo, si requiriésemos sustraer 9 de 5, esta instancia nos proporciona la idea de un nuevo tipo de números a los que llamaremos negativos, porque $5 - 9 = -4$.

210. Cuando varios números iguales han de ser añadidos juntos, su suma se encuentra multiplicándolos, y se llama producto. Así, *ab* significa el producto que surge de la multiplicación de *a* por *b*, o de la adición de un número *a b* veces por sí mismo. Si representamos este producto con la letra *c*, tendremos $ab = c$, y la multiplicación nos enseña cómo determinar el número *c* si conocemos los números *a* y *b*.

211. Propongamos lo siguiente: siendo conocidos los números *a* y *c*, encontrar el número *b*. Supongamos, por ejemplo, que $a = 3$ y $c = 15$, así que $3b = 15$. Esta cuestión se reduce a preguntarse por qué número ha de multiplicarse 3 para que el producto sea 15. Ahora bien, esto es división: el número requerido se encuentra dividiendo 15 entre 3; por lo tanto, el númeo *b* se encuentra al dividir *c* entre *a*, de lo que resulta la ecuación $b = \frac{c}{a}$.

212. Hemos visto que la multiplicación surge de la adición, es decir, de la adición de varias cantidades iguales. Si damos un paso más, veremos que de la multiplicación de varias cantidades iguales se derivan las potencias. Tales potencias están representadas, de manera general, por la expresión a^b, que significa que el número *a* debe multiplicarse tantas veces por sí mismo como lo denote el número *b*. Y sabemos, por lo que hemos dicho, que en este caso *a* es la raíz, *b* el exponente, y a^b la potencia.

214. Además, si representamos esta potencia también por la letra *c*, tendremos $a^b = c$, una ecuación en la que encontramos tres letras: *a*, *b*, y *c*. Ya hemos visto cómo encontrar, al tratar con potencias, la potencia misma, esto es, la letra *c*, cuando están dadas una raíz *a* y su exponente *b*. Supongamos, por ejemplo, que $a = 5$ y $b = 3$; de esta manera, $c = 5^3$, y es evidente que debemos tomar la tercera potencia de 5, que es 125, para que así $c = 125$.

215. Ya vimos cómo determinar la potencia *c* por medio de la raíz *a* y del exponente *b*, pero si queremos revertir la cuestión descubriremos que esto puede hacerse de dos formas y que hay dos casos que debemos considerar, porque si estuviesen dados dos de estos tres números *a*, *b*, *c*, y si se requiriese encontrar el tercero, inmediatamente percibimos que esta cuestión admite tres suposiciones distintas, y consecuentemente tres soluciones. Ya consideramos el caso en donde *a* y *b* fueron los números dados, y es así que podemos suponer que conocemos *c* y *a*, o *c* y *b*, y que se requiere determinar la tercera letra. Antes de seguir, vale señalar una distinción esencial entre la involución y las dos operaciones que condujeron a ella. Cuando en el caso de la adición revertimos la cuestión, sólo pudimos hacerlo de una manera; era indiferente si tomábamos *c* y *a* o *c* y *b* para los números dados, porque indiferentemente podemos escribir $a+b$ o $b+a$. Fue lo mismo con la multiplicación; pudimos tomar, a voluntad, las letras *a* y *b* una por la otra y la ecuación $ab=c$ es exactamente la misma que $ba=c$.

Sin embargo, en el cálculo de potencias no sucede lo mismo, y de ninguna manera podemos escribir b^a en lugar de a^b. Un solo ejemplo será suficiente para mostrar esto: sean $a=5$ y $b=3$; tenemos $a^b=5^3=125$. Pero $b^a=3^5=243$; dos resultados muy distintos.

SECCIÓN II

DE LOS DISTINTOS MÉTODOS PARA CALCULAR CANTIDADES COMPUESTAS

CAPÍTULO I

DE LA ADICIÓN DE CANTIDADES COMPUESTAS

216. Cuando dos o más expresiones consistentes en varios términos han de ser añadidas, solemos representar esta operación meramente con signos, poniendo cada expresión entre paréntesis y conectándola con el resto por medio del signo +. Si requiriésemos, por ejemplo, añadir las expresiones $a+b+c$ y $d+e+f$, representamos la suma así:

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

217. Es evidente que esto no equivale a realizar la adición, sino únicamente a representarla. Pero al mismo tiempo vemos que, para llevarla a cabo realmente, sólo tenemos que dejar fuera los paréntesis, porque como el número $d+e+f$ ha de ser añadido al otro, sabemos que esto se hace uniéndole primero $+d$, después $+e$, y después $+f$, lo que da la suma $a+b+c+d+e+f$.

El mismo método ha de observarse si cualesquiera de los términos están afectados por el signo -; deben ser unidos de la misma forma por medio de su signo adecuado.

218. Para hacer esto más evidente, consideremos un ejemplo en los números puros. Se propone añadir la expresión $15-6$ a $12-8$. Si comenzamos por añadir 15, tendremos $12-8+15$, pero esto fue añadir demasiado, porque sólo teníamos que añadir $15-6$, así que es claro que 6 es el número que hemos añadido de más. Quitemos, pues, este 6 al escribirlo con el signo negativo, y así tendremos la suma verdadera: $12-8+15-6$, que muestra que *las sumas se encuentran al escribir todos los términos, cada uno con su signo adecuado*.

219. Si se requiriese, pues, añadir la expresión $d-e-f$ a $a-b+c$, expresaríamos la suma como sigue:

$$a-b+c+d-e-f,$$

señalando que no importa en qué orden escribamos estos términos. Su lugar puede ser cambiado a placer siempre que se conserven sus signos. Por ejemplo, esta suma podría escribirse así:

$$c - e + a - f + d - b.$$

220. A menudo sucede que las sumas representadas de esta manera pueden ser reducidas considerablemente, como cuando dos o más términos se destruyen entre sí; por ejemplo, si en la misma suma encontramos los términos $+a-a$ o $3a-4a+a$, o cuando dos o más términos pueden ser reducidos a uno. Ejemplos de esta segunda reducción son: $3a+2a=5a$; $7b-3b=+4b$; $-6c+10c=+4c$; $5a-8a=-3a$; $-7b+b=-6b$; $-3c-4c=-7c$; $2a-5a+a=-2a$; $-3b-5b+2b=-6b$.

Siempre que dos o más términos sean completamente los mismos con respecto a las letras, su suma puede ser reducida, pero tales casos no deben confundirse con $2aa+3a$ o $2b^3-b^4$, que no admiten reducción.

221. Consideremos unos cuantos ejemplos más de reducción que inmediatamente nos llevarán a una verdad importante. Supongamos que se requiere añadir las expresiones $a+b$ y $a-b$. Nuestra regla nos da $a+b+a-b$; pero $a+a=2a$ y $b-b=0$, así que la suma es $2a$. Consecuentemente, si añadimos la suma de dos números $(a+b)$ y su diferencia $(a-b)$ obtenemos el doble del mayor de tales dos números.

Más ejemplos:

$3a-2b-c$	$a^3-2aab+2abb$
$5b-6c+a$	$-aab+2abb-b^3$
$4a+3b-7c$	$a^3-3aab+4abb-b^3$

CAPÍTULO II

DE LA SUSTRACCIÓN DE CANTIDADES COMPUESTAS

222. Si únicamente queremos representar la sustracción, encerramos cada expresión entre paréntesis y unimos, por el signo -, la expresión a ser sustraída con aquella de la cual habemos de sustraerla.

Cuando sustraemos, por ejemplo, la expresión $d-e+f$ de la expresión $a-b+c$, escribimos la resta así:

$$(a-b+c)-(d-e+f),$$

y este método de representación resulta suficiente para mostrar cuál de las dos expresiones ha de ser sustraída de la otra.

223. Pero si queremos llevar a cabo realmente la sustracción, primero debemos observar que cuando sustraemos una cantidad positiva $+b$ de otra cantidad *a*, obtenemos $a-b$ y, segundo, que cuando sustraemos una cantidad negativa $-b$ de *a*, obtenemos $a+b$, porque liberar a una persona de una deuda es lo mismo que darle algo.

224. Ahora supongamos que se requiere sustraer la expresión $b-d$ de la expresión $a-c$. Primero quitamos *b*, lo que da $a-c-b$. Pero esto fue quitar demasiado según la cantidad *d*, porque sólo teníamos que sustraer $b-d$. Debemos, por lo tanto, restaurar el valor de d y así tendremos $a-c-b+d$, de donde es evidente que los términos de la expresión a ser sustraída deben cambiar sus signos y ser unidos, con los signos contrarios, a los términos de la otra expresión.

225. Por medio de esta regla es fácil, entonces, llevar a cabo la sustracción, porque sólo tenemos que escribir la expresión de la cual hemos de sustraer tal como está y unirle la otra sin ningún cambio además del de los signos. Así, en el primer ejemplo, donde se requería sustraer la expresión $d-e+f$ de $a-b+c$, obtenemos $a-b+c-d+e-f$. Un ejemplo con números hará esto más claro. Si sustraemos $6-2+4$ de $9-3+2$, evidentemente obtenemos $9-3+2-6+2-4$, porque $9-3+2=8$, y $6-2+4=8$, así que $8-8=0$.

226. No estando sujeta la sustracción a ninguna dificultad, sólo debemos observar que si en la resta encontramos dos o más términos que son completamente similares con respecto a las letras, tal resta puede ser reducida por las mismas reglas ofrecidas en la adición.

227. Supongamos que tenemos que sustraer de $a+b$, o de la suma de dos cantidades, su diferencia $a-b$; entonces tendremos $a+b-a+b$. Pero $a-a=0$ y $b+b=2b$, así que la resta buscada es $2b$, esto es, el doble de la menor de las dos cantidades.

228. Los siguientes ejemplos darán lugar a más ilustraciones:

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$	$a^3+3aab+3abb+b^3$	$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$
$bb+ab-aa$	$2b+4c-6a$	$a^3-3aab+3abb-b^3$	$\sqrt{a}-3\sqrt{b}$
$2aa$	$9a-6b+c$	$6aab+2b^3$	$+5\sqrt{b}$

CAPÍTULO III

DE LA MULTIPLICACIÓN DE CANTIDADES COMPUESTAS

229. Cuando sólo requerimos representar la multiplicación, ponemos cada una de las expresiones a ser multiplicadas dentro de dos paréntesis, y las unimos a veces sin signo alguno, y a veces poniendo el signo $\times$ entre ellas. Por ejemplo, para representar el producto de las dos expresiones $a-b+c$ y $d-e+f$, escribimos

$$(a-b+c)\times(d-e+f).$$

Este método para expresar productos es muy recurrido porque inmediatamente muestra los factores de los que aquellos están compuestos.

230. Pero para mostrar cómo ha de realizarse efectivamente una multiplicación podemos observar, en primer lugar, que para multiplicar una cantidad como $a-b+c$ por 2, por ejemplo, cada término debe ser multiplicado por separado por el número, así que el producto es $2a-2b+2c$. Lo mismo aplica con respecto a todos los demás números. Si *d* fuese el número por el cual se requiere multiplicar la misma expresión, obtendríamos $ad-bd+cd$.

231. Acabamos de suponer que *d* es un número positivo, pero si el factor fuese un número negativo como $-e$, debe aplicarse la regla establecida antes, a saber, que *dos signos contrarios multiplicados juntos producen -, y que dos signos iguales dan +*.

Tendremos, entonces

$$-ae+be-ce.$$

232. Para mostrar cómo ha de multiplicarse una cantidad *A* por una cantidad compuesta $d-e$, consideremos primero un ejemplo con números comunes, suponiendo que *A* ha de ser multiplicada por $7-3$. Ahora, es evidente que aquí requerimos tomar el cuádruple de *A*, porque si primero tomamos *A* siete veces, después será necesario sustraer $3A$ de tal producto. En general, por lo tanto, si se requiere multiplicar por $d-e$

multiplicamos la cantidad A primero por d y después por e, y sustraemos este último producto del primero, de donde resulta $dA - eA$.

Ahora supongamos que $A = a - b$ y que esta es la cantidad a ser multiplicada por $d - e$; entonces tendremos

$$dA = ad - bd$$

$$eA = ae - be,$$

y por consiguiente el producto requerido $= ad - bd - ae + be$.

233. Como conocemos el producto $(a-b)\times(d-e)$ y no podemos dudar de su precisión, mostraremos el mismo ejemplo de multiplicación bajo la siguiente forma:

$$\begin{array}{c} a - b \\ d - e \\ ad - bd - ae + be. \end{array}$$

Esto muestra que debemos *multiplicar cada término de la expresión de arriba por cada término de la de abajo* y que, con respecto a los signos, debemos observar estrictamente la regla dada antes, una regla que esto confirma por completo si es que quedaba la menor duda.

234. De acuerdo con esta regla, será fácil llevar a cabo el siguiente ejemplo, que consiste en multiplicar $a + b$ por $a - b$:

$$\begin{array}{c} a + b \\ a - b \\ aa + ab \\ - ab - bb \\ \text{Producto: } aa - bb. \end{array}$$

235. Ahora podemos sustituir, por a y b, cualesquiera números determinados, de tal forma que el ejemplo de arriba nos proporcionará el siguiente teorema: *El producto de la suma de dos números multiplicados por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de tales números*. Este teorema puede expresarse así:

$$(a+b)\times(a-b) = aa - bb.$$

Y de esto puede derivarse otro teorema: *La diferencia de dos números cuadrados siempre es un producto divisible tanto entre la suma como entre la diferencia de las raíces*

de tales dos cuadrados; consecuentemente, la diferencia de dos cuadrados nunca puede ser un número primo.

236. Realicemos ahora algunos otros ejemplos:

I)
$$\begin{array}{l} 2a-3 \\ a+2 \\ 2aa-3a \\ +4a-6 \\ 2aa+a-6 \\ 4aa-6a+9 \\ 2a+3 \end{array}$$

II)
$$\begin{array}{l} 8a^3-12aa+18a \\ +12aa-18a+27 \\ 8a^3+27 \end{array}$$

III)
$$\begin{array}{l} 3aa-2ab-bb \\ 2a-4b \\ 6a^3-4aab-2abb \\ -12aab+8abb+4b^3 \\ 6a^3-16aab+6abb+4b^3 \end{array}$$

IV)
$$\begin{array}{l} aa+2ab+2bb \\ aa-2ab+2bb \\ a^4+2a^3b+2aabb \\ -2a^3b-4aabb-4ab^3 \\ +2aabb+4ab^3+4b^4 \\ a^4+4b^4 \end{array}$$

V)
$$\begin{array}{l} 2aa-3ab-4bb \\ 3aa-2ab+bb \\ 6a^4-9a^3b-12aabb \\ -4a^3b+6aabb+8ab^3 \\ +2aabb-3ab^3-4b^4 \\ 6a^4-13a^3b-4aabb+5ab^3-4b^4 \end{array}$$

VI)
$$aa+bb+cc-ab-ac-bc$$
$$a+b+c$$
$$a^3+abb+acc-aab-aac-abc$$
$$aab+b^3+bcc-abb-abc-bbc$$
$$aac+bbc+c^3-abc-acc-bcc$$
$$a^3-3abc+b^3+c^3$$

237. *Cuando tenemos más de dos cantidades a multiplicar, fácilmente se comprenderá que, después de haber multiplicado dos de ellas, debemos multiplicar tal producto por una de las [cantidades] que quedan, y así sucesivamente. Es indistinto qué orden observemos en tales multiplicaciones.*

Propongamos, por ejemplo, encontrar el valor o el producto de los siguientes cuatro factores:

I: $(a+b)$ II: $(aa+ab+bb)$ III: $(a-b)$ IV: $(aa-ab+bb)$.

Primero multiplicamos los factoes I y II:

II: $aa+ab+bb$

I: $a+b$

$$a^3+aab+abb$$
$$+aab+abb+b^3$$

I.II: $a^3+2aab+2abb+b^3$.

Después multipliquemos los factores III y IV:

IV: $aa-ab+bb$

III: $a-b$

$$a^3-a^2b+abb$$
$$-a^2b+abb-b^3$$

III.IV: $a^3-2aab+2abb-b^3$.

Queda por multiplicar el primer producto I.II por este segundo producto III.IV:

I.II: $a^3+2aab+2abb+b^3$

III.IV: $a^3-2aab+2abb-b^3$

$a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3b^3$

$-2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b^3 - 2aab^4$

$2a^4bb + 4a^3b^3 + 4aab^4 + 2ab^5$

$-a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6$

$a^6 - b^6$. Y este es el producto requerido.

238. Hagamos el mismo ejemplo pero cambiando su orden, multiplicando primero los factores I y III y después II y IV.

I: $a + b$

III: $a - b$

$aa + ab$

$-ab - bb$

I.III: $aa - bb$

II: $aa + ab + bb$

IV: $aa - ab + bb$

$a^4 + a^3b + aabb$

$-a^3b - aabb - ab^3$

$aabb + ab^3 + b^4$

II.IV: $a^4 + aabb + b^4$.

Después, multiplicando los dos productos I.III y II.IV,

II.IV: $a^4 + aabb + b^4$

I.III: $aa - bb$

$a^6 + a^4bb + aab^4$

$-a^4bb - aab^4 - b^6$

tenemos $a^6 - b^6$, que es el producto requerido.

239. Podemos hacer este cálculo todavía de otra manera más, multiplicando primero el primer factor por el cuarto y después el segundo por el tercero.

IV: $aa - ab + bb$

I: $a + b$

$a^3 - aab + abb$

$aab - abb + b^3$

I.IV: $a^3 + b^3$

II: $aa + ab + bb$

III: $a - b$

$a^3 + aab + abb$

$- aab - abb - b^3$

II.III: $a^3 - b^3$.

Queda por multiplicar el producto I.IV y II.III.

I.IV: $a^3 + b^3$

II.III: $a^3 - b^3$

$a^6 + a^3b^3$

$- a^3b^3 - b^6$

y obtenemos $a^6 - b^6$ al igual que antes.

240. Es apropiado ilustrar este ejemplo con una aplicación numérica. Sean $a = 3$ y $b = 2$; entonces tendremos $a + b = 5$ y $a - b = 1$; además, $aa = 9, ab = 6, bb = 4$. Por lo tanto, $aa + ab + bb = 19$ y $aa - ab + bb = 7$. Así que el producto requerido es el de $5 \times 19 \times 1 \times 7$, que es 665. Ahora bien, $a^6 = 729$ y $b^6 = 64$; consecuentemente, el producto requerido es $a^6 - b^6 = 665$, tal como ya vimos.

CAPÍTULO IV

DE LA DIVISIÓN DE CANTIDADES COMPUESTAS

241. Cuando queremos simplemente representar la división, hacemos uso de la marca usual de las fracciones, que es escribir el denominador bajo el numerador separándolos por una línea, o bien encerrando cada cantidad entre paréntesis y poniendo dos puntos entre el divisor y el dividendo. Si se requiriese, por ejemplo, dividir $a + b$ entre $c + d$, representaríamos el cociente así $\frac{a+b}{c+d}$, de acuerdo con el primer método, y así $(a + b) : (c + d)$ de acuerdo con el segundo. Cada expresión se lee como $a + b$ dividido entre $c + d$.

242. *Cuando se requiere dividir una cantidad compuesta entre una [cantidad] simple, dividimos cada término por separado*. Por ejemplo, $6a - 8b + 4c$ dividido entre 2

da $3a-4b+2c$, y $(aa-2ab):(a)=a-2b$. Del mismo modo, $(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb;(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc$; $(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c$, etc.

243. Si sucede que un término del dividendo no es divisible por el divisor, representamos el cociente por una fracción, como en la división de $a+b$ entre *a*, que da $1+\frac{b}{a}$. Del mismo modo, $(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$. Por la misma razón, si dividimos $2a+b$ entre 2 obtenemos $a+\frac{b}{2}$, y aquí podemos notar que podemos escribir $\frac{1}{2}b$ en lugar de $\frac{b}{2}$, porque $\frac{1}{2}$ veces *b* es igual a $\frac{b}{2}$. De igual forma, $\frac{b}{3}$ es lo mismo que $\frac{1}{3}b$, y $\frac{2b}{3}$ es lo mismo que $\frac{2}{3}b$, etc.

244. Pero cuando el divisor es por sí mismo una cantidad compuesta, la división se vuelve más difícil. A veces esto sucede cuando menos lo esperamos, pero si no puede llevarse a cabo debemos contentarnos con representar el cociente por una fracción en la forma en que lo hemos descrito. Comencemos por considerar algunos casos en donde la divisón real es posible.

245. Supongamos que se requiere dividir el dividendo $ac-bc$ entre el divisor $a-b$; entonces *el cociente debe ser tal que, cuando sea multiplicado por el divisor* $a-b$, *produzca el dividendo* $ac-bc$. Ahora bien, es evidente que este cociente debe incluir a *c*, porque sin él no podríamos obtener *ac*. Para ver si *c* es todo el cociente que necesitamos, sólo tenemos que multiplicarlo por el divisor y ver si tal multiplicación produce todo el dividendo o solamente una parte de él. En el caso presente, si multiplicamos $a-b$ por *c*, tenemos $ac-bc$, que es exactamente el dividendo, así que *c* es todo el cociente. No es menos evidente que $(aa+ab):(a+b)=a$; $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$; $(6aa-9ab):(2a-3b)=3a$, etc.

246. *De esta manera no podemos fallar en encontrar una parte del cociente; si, por lo tanto, lo que hemos encontrado, cuando lo multiplicamos por el divisor, no agota al dividendo, sólo tenemos que dividir el remanente de nuevo entre el divisor para obtener*

una segunda parte del cociente, y continuar con el mismo método hasta que hayamos encontrado todo el cociente.

Como ejemplo, dividamos $aa+3ab+2bb$ entre $a+b$. Es evidente, primero, que el cociente incluirá al término *a*, porque de otra forma no obtendríamos *aa*. Ahora, de la multiplicación del divisor $a+b$ por *a* surge $aa+ab$, cuya cantidad sustraída del dividendo deja $2ab+2bb$ como remanente. Este remanente también debe ser dividido entre $a+b$, y es claro que el cociente de esta división debe contener al término $2b$. Ahora, $2b$ multiplicado por $a+b$ produce exactamente $2ab+2bb$; consecuentemente, $a+2b$ es el cociente requerido que, multiplicado por el divisor $a+b$, debe producir el dividendo $aa+3ab+2bb$. Veamos toda la operación:

$$a+b)aa+3ab+2bb(a+2b$$
$$aa+ab$$
$$2ab+2bb$$
$$2ab+2bb$$
$$0$$

247. *Esta operación será más fácil si elegimos uno de los términos del divisor para ser escrito primero y después, al acomodar los términos del dividendo, comenzamos con las potencias más grandes de tal primer término del divisor*. Este término era *a* en el ejemplo anterior. Los siguientes ejemplos aclararán la operación.

$$a-b)a^3-3aab+3abb-b^3(aa-2ab+bb$$
$$a^3-aab$$
$$-2aab+3abb$$
$$-2aab+2abb$$
$$abb-b^3$$
$$abb-b^3$$
$$0$$

$$a+b)aa-bb(a-b$$
$$aa+ab$$
$$-ab-bb$$
$$-ab-bb$$
$$0$$

$3a-2b)18aa-8bb(6a+4b$

$18aa-12ab$

$12ab-8bb$

$12ab-8bb$

0

$a+b)a^3+b^3(aa-ab+bb$

a^3+aab

$-aab+b^3$

$-aab-abb$

$abb+b^3$

$abb+b^3$

0

$2a-b)8a^3-b^3(4aa+2ab+bb$

$8a^3-4aab$

$4aab-b^3$

$4aab-2abb$

$2abb-b^3$

$2abb-b^3$

0

$aa-2ab+bb)a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4(aa-2ab+bb$

$a^4-2a^3b+aabb$

$-2a^3b+5aabb-4ab^3$

$-2a^3b+4aabb-2ab^3$

$aabb-2ab^3+b^4$

$aabb-2ab^3+b^4$

0

$aa-2ab+4bb)a^4+4aabb+16b^4(aa-2ab+4bb$

$a^4-2a^3b+4aabb$

$2a^3b+16b^4$

$2a^3b-4aabb+8ab^3$

$4aabb-8ab^3+16b^4$

$4aabb-8ab^3+16b^4$

0

$aa-2ab+2bb)a^4+4b^4(aa+2ab+2bb$

$a^4-2a^3b+2aabb$

$2a^3b-2aabb+4b^4$

$2a^3b-4aabb+4ab^3$

$2aabb-4ab^3+4b^4$

$2aabb-4ab^3+4b^4$

0

$1-2x+xx)1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5(1-3x+3xx-x^3$

$1-2x+xx$

$-3x+9xx-10x^3$

$-3x+6xx-3x^3$

$3xx-7x^3+5x^4$

$3xx-6x^3+3x^4$

$-x^3+2x^4-x^5$

$-x^3+2x^4-x^5$

0

CAPÍTULO V

DE LA RESOLUCIÓN DE FRACCIONES EN SERIES INFINITAS

248. Cuando el dividendo no es divisible por el divisor, el cociente se expresa, como ya vimos, con una fracción. Así, si tenemos que dividir 1 entre $1-a$, obtenemos la fracción

$\frac{1}{1-a}$. Esto, sin embargo, no nos impide intentar la división de acuerdo con las reglas ofrecidas y continuar tanto como queramos. No dejaremos de encontrar el verdadero cociente, aunque bajo distintas formas.

249. Para probar esto, dividamos en realidad el dividendo 1 entre el divisor $1-a$ así:

$1-a)1(1+\frac{a}{1-a}$

$1-a$

remanente a

o, $1-a)1(1+a+\frac{aa}{1-a}$

$1-a$

a

$a-aa$

remanente aa

Para encontrar un mayor número de formas, sólo tenemos que seguir dividiendo aa entre $1-a$:

$1-a)aa(aa+\frac{a^3}{1-a}$

$aa-a^3$

a^3

$1-a)a^3(a^3+\frac{a^4}{1-a}$

a^3-a^4

a^4

$1-a)a^4(a^4+\frac{a^5}{1-a}$

a^4-a^5

a^5

Y así sucesivamente.

250. Esto muestra que la fracción $\frac{1}{1-a}$ puede ser expuesta bajo todas las formas siguientes: I) $1+\frac{a}{1-a}$; II) $1+a+\frac{aa}{1-a}$; III) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$; IV) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$; V) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, etc.

Ahora, al considerar la primera de estas expresiones, que es $1+\frac{a}{1-a}$, y recordando que 1 es lo mismo que $\frac{1-a}{1-a}$, tenemos $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$. Si seguimos el mismo proceso con respecto a la segunda expresión $1+a+\frac{aa}{1-a}$, esto es, si reducimos la parte integral $1+a$ al mismo denominador $1-a$, tendremos $\frac{1-aa}{1-a}$, y si le añadimos $+\frac{aa}{1-a}$ tendremos $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, es decir, $\frac{1}{1-a}$.

En la tercera expresión $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, los enteros reducidos al denominador $1-a$ hacen $\frac{1-a^3}{1-a}$, y si a esto añadimos la fracción $\frac{a^3}{1-a}$ tendremos $\frac{1}{1-a}$. De aquí se sigue que todas estas expresiones son iguales en valor a $\frac{1}{1-a}$, la fracción propuesta.

251. Siendo este el caso, podemos continuar la serie tanto como queramos sin tener que realizar más cálculos. Tendremos, pues $\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}$, y podemos continuar así sin final. Por esta razón puede decirse que la fracción propuesta ha sido resuelta en una serie infinita, que es $1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}$, etc., hasta el infinito, y hay suficientes razones para mantener que el valor de esta serie infinita es el mismo que el de la fracción $\frac{1}{1-a}$.

252. En un principio, lo que hemos dicho podría parecer sorprendente, pero la consideración de casos particulares hará más fácil su comprensión. Supongamos, en primer

lugar, que $a=1$; entonces nuestra serie será 1+1+1+1+1+1+1, etc. La fracción $\frac{1}{1-a}$, a la cual debe ser igual, se vuelve $\frac{1}{0}$. Ya vimos antes que $\frac{1}{0}$ es un número infinitamente grande, lo que se confirma aquí de una manera satisfactoria.

Si suponemos que $a=2$, nuestra serie se vuelve =1+2+4+8+16+32+64, etc., hasta el infinito, y su valor tiene que ser $\frac{1}{1-2}$, esto es, $\frac{1}{-1}=-1$, lo que a primera vista parecerá absurdo. Pero debemos observar que si queremos detenernos en cualquier término de esta serie, no podemos hacerlo sin unir la fracción que queda. Supongamos, por ejemplo, que nos detenemos en 64 después de haber escrito 1+2+4+8+16+32+64; debemos unir la fracción $\frac{128}{1-2}$, o $\frac{128}{-1}$, o -128, y por tanto tendremos $127-128$, que en realidad es -1.

Si tuviésemos que continuar la serie sin entreacto alguno, en realidad la fracción ya no sería considerada, pero la serie continuaría.

253. Estas son las consideraciones necesarias cuando asumimos para *a* números mayores que la unidad. Pero si suponemos que *a* es menor que 1, todo se vuelve más inteligible.

Por ejemplo, sea $a=\frac{1}{2}$. Entonces tendremos $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, lo que será igual a la siguiente serie: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$, etc., hasta el infinito. Ahora, si tomamos sólo dos términos de esta serie, tenemos $1+\frac{1}{2}$, y se requiere $\frac{1}{2}$ para que sea igual a $\frac{1}{1-a}=2$. Si tomamos tres términos, se requiere $\frac{1}{4}$, porque la suma es $1\frac{3}{4}$. Si tomamos cuatro términos tenemos $1\frac{7}{8}$, y la deficiencia es sólo $\frac{1}{8}$. Vemos, pues, que entre más términos tomemos, menor se vuelve la diferencia, y que, consecuentemente, si continuamos hasta el infinito, no habrá diferencia alguna entre la suma de la serie y 2, el valor de la fracción $\frac{1}{1-a}$.

254. Sea $a=\frac{1}{3}$. Entonces nuestra fracción $\frac{1}{1-a}$ será $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ que, reducida a una serie infinita, se vuelve $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$, etc., y que es consecuentemente igual a $\frac{1}{1-a}$.

Cuando tomamos dos términos, tenemos $1\frac{1}{3}$ y nos falta $\frac{1}{6}$. Si tomamos tres términos, tenemos $1\frac{4}{9}$ y nos faltará $\frac{1}{18}$. Tomemos cuatro términos y tendremos $1\frac{13}{27}$ y la diferencia es $\frac{1}{54}$. Ya que el error siempre se vuelve tres veces menos, al final debe desaparecer.

255. Supongamos que $a=\frac{2}{3}$; tendremos $\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$ y la serie $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}$, etc., hasta el infinito. Tomando primero $1\frac{2}{3}$, el error es $1\frac{1}{3}$; tomando tres términos, que hacen $2\frac{1}{9}$, el error es $\frac{8}{9}$; tomando cuatro términos tenemos $2\frac{11}{27}$, y el error es $\frac{16}{27}$.

256. Si $a=\frac{1}{4}$, la fracción es $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=1\frac{1}{3}$ y la serie se vuelve $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}$, etc. Los primeros dos términos, haciendo $1+\frac{1}{4}$, darán $\frac{1}{12}$ como error, y tomando un término más tenemos $1\frac{5}{15}$, esto es, sólo un error de $\frac{1}{48}$.

257. Del mismo modo, podemos resolver la fracción $\frac{1}{1+a}$ en una serie infinita al dividir efectivamente el numerador 1 entre el denominador $1+a$ como sigue:

$1+a)1(1-a+aa-a^3+a^4$

$1+a$

$-a$

$-a-aa$

aa

$aa+a^3$

$-a^3$

$-a^3-a^4$

a^4

a^4+a^5

$-a^5$, etc.

De aquí se sigue que la fracción $\frac{1}{1+a}$ es igual a la serie $1-a+aa-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7$, etc.

258. Si hacemos que $a=1$, tenemos esta notable comparación: $\frac{1}{1+a}=\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+1-1$, etc. hasta el infinito. Esto podría parecer bastante contradictorio, porque si nos detenemos en -1 la serie dará 0, y si paramos en $+1$ dará 1. Pero esto es precisamente lo que resuelve la dificultad, porque como debemos seguir hasta el infinito sin detenernos en -1 ni en $+1$, es evidente que la suma no puede ser ni 0 ni 1, sino que el resultado debe estar entre estos dos, y por lo tanto ser $=\frac{1}{2}$.

259. Hagamos ahora que $a=\frac{1}{2}$; entonces nuestra fracción será $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$, lo que debe por tanto expresar el valor de la serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}$, etc., hasta el infinito. Si únicamente tomamos los primeros dos términos de esta serie, tenemos $\frac{1}{2}$, que es muy pequeño por $\frac{1}{6}$. Si tomamos tres términos tenemos $\frac{3}{4}$, que es muy grande por $\frac{1}{12}$. Si tomamos cuatro términos tenemos $\frac{5}{8}$, que es muy pequeño por $\frac{1}{24}$, etc.

260. Supongamos, de nuevo, que $a=\frac{1}{3}$; entonces nuestra fracción será $=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$, y esto debe ser igual a la serie $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-\frac{1}{243}+\frac{1}{729}$, etc., continuada hasta el infinito. Ahora bien, si consideramos solamente dos términos, tenemos $\frac{2}{3}$, que es muy pequeño por $\frac{1}{12}$. Tres términos hacen $\frac{7}{9}$, que es muy grande por $\frac{1}{36}$. Cuatro términos hacen $\frac{20}{27}$, que es muy pequeño por $\frac{1}{108}$, y así sucesivamente.

261. La fracción $\frac{1}{1+a}$ también puede resolverse en una serie infinita de una manera distinta, a saber, al dividir 1 entre $a+1$ como sigue:

$$
\begin{array}{l}
a+1)1(\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\
1+\frac{1}{a} \\
-\frac{1}{a} \\
-\frac{1}{a}-\frac{1}{aa} \\
\frac{1}{aa} \\
\frac{1}{aa}+\frac{1}{a} \\
-\frac{1}{a^3} \\
-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4} \\
\frac{1}{a^4} \\
\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5} \\
-\frac{1}{a^5}\text{, etc.}
\end{array}
$$

Consecuentemente, nuestra fracción $\frac{1}{a+1}$ es igual a la serie infinita $\frac{1}{a}-\frac{1}{aa}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$, etc. Ahora hagamos que $a=1$ y tendremos la serie $1-1+1-1+1-1$, etc., $=\frac{1}{2}$, tal como antes. Y si suponemos que $a=2$ tendremos la serie $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$, etc., $=\frac{1}{3}$.

262. De la misma forma, al resolver la fracción general $\frac{c}{a+b}$ en una serie infinita, tendremos

$$
\begin{array}{l}
a+b)c(\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4} \\
c+\frac{bc}{a} \\
-\frac{bc}{a} \\
-\frac{bc}{a}-\frac{bbc}{aa} \\
\frac{bbc}{aa} \\
\frac{bbc}{aa}+\frac{b^3a}{a^3} \\
-\frac{b^3c}{a^3} \\
-\frac{b^3c}{a^4}-\frac{b^4c}{a^4} \\
\frac{b^4c}{a^4}
\end{array}
$$

De donde se desprende que podemos comparar $\frac{c}{a+b}$ con la serie $\frac{c}{a}-\frac{bc}{aa}+\frac{bbc}{a^3}-\frac{b^3c}{a^4}$, etc., hasta el infinito.

Sean $a=2, b=4, c=3$. Entonces tendremos $\frac{c}{a+b}=\frac{3}{4+2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-3+6-12$, etc.

Sean $a=10, b=1, c=11$. Entonces tendremos $\frac{c}{a+b}=\frac{11}{10+1}=1=\frac{11}{10}-\frac{11}{100}+\frac{11}{1000}-\frac{11}{10000}$, etc.

Si consideramos únicamente un término de esta serie, tenemos $\frac{11}{10}$, que es muy grande por $\frac{1}{10}$; si tomamos dos términos tenemos $\frac{99}{100}$, que es demasiado pequeño por $\frac{1}{100}$; si tomamos tres términos tenemos $\frac{1001}{1000}$, que es demasiado grande por $\frac{1}{1000}$, etc.

263. Cuando haya más de dos términos en el divisor, podemos continuar la división hasta el infinito de la misma manera. Así, si se propusiese la fracción $\frac{1}{1-a+aa}$, la serie infinita, a la que es igual, sería la siguiente:

$1-a+aa)1(1+a-a^3-a^4+a^6+a^7$, etc.

$1-a+aa$

$a-aa$

$a-aa+a^3$

$-a^3$

$-a^3+a^4-a^5$

$-a^4+a^5$

$-a^4+a^5-a^6$

a^6

$a^6-a^7+a^8$

a^7-a^8

$a^7-a^8+a^9$

$-a^9$

Tenemos, por lo tanto, la ecuación $\frac{1}{1-a+aa}=1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}$, etc. Aquí, si hacemos que $a=1$, tenemos $1=1+1-1-1+1+1-1-1+1+1$, etc., que contiene el doble de la serie de antes ($1-1+1-1+1$, etc.). Ahora, como hemos encontrado que esto es $=\frac{1}{2}$, no resulta sorprendente que encontremos $\frac{2}{2}$, o 1, para el valor de aquello que recién hemos determinado.

Hagamos que $a=\frac{1}{2}$ y entonces tendremos la ecuación $\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512}$, etc.

Ahora supongamos que $a=\frac{1}{3}$; entonces tendremos la ecuación $\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729}$, etc. Si tomamos los cuatro términos principales de esta serie tenemos $\frac{104}{81}$, que sólo es $\frac{1}{567}$ menor que $\frac{9}{7}$.

Supongamos, de nuevo, que $a=\frac{2}{3}$. Entonces tendremos $\frac{1}{\frac{7}{9}}=\frac{9}{7}=1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729}$, etc. Esta serie, por consiguiente, debe ser igual a la anterior, y es así que, sustrayendo una de la otra, obtenemos $\frac{1}{3}-\frac{7}{27}-\frac{15}{81}+\frac{63}{729}$, que debe ser $=0$. Estos cuatro términos sumados dan $-\frac{2}{81}$.

264. El método recién expuesto sirve para resolver, de manera general, todas las fracciones en series infinitas y resulta, por lo tanto, de gran utilidad. Además, hemos de observar que *una serie infinita, aunque nunca cesa, puede tener un valor determinado*. Podríamos añadir que de esta rama de las matemáticas han surgido invenciones de máxima importancia sobre las cuales requerimos la mayor atención.

CAPÍTULO VI

DE LOS CUADRADOS DE CANTIDADES COMPUESTAS

265. Cuando requerimos encontrar el cuadrado de una cantidad compuesta, sólo tenemos que multiplicarla por sí misma, y entonces el producto será el cuadrado requerido.

Por ejemplo, encontramos el cuadrado de $a+b$ de la siguiente forma:

$a+b$

$a+b$

$aa+ab$

$ab+bb$

$aa+2ab+bb$.

266. Así que, *cuando la raíz consiste en dos términos añadidos*, como $a+b$, *el cuadrado comprende, primero, al cuadrado de cada término*, a saber, *aa* y *bb*, *y segundo, al doble del producto de los dos términos*, a saber, $2ab$. De esta forma, la suma $aa+2ab+bb$ es el cuadrado de $a+b$. Sean, por ejemplo, $a=10$ y $b=3$, es decir, requiérase encontrar el cuadrado de 13; entonces tendremos $100+60+9$ o 169.

267. Por medio de esta fórmula es fácil encontrar los cuadrados de los números - sin importar qué tan grandes sean - si los dividimos en dos partes. Para encontrar, por ejemplo, el cuadrado de 57, consideremos que este número es $=50+7$; de aquí concluimos que su cuadrado es $=2500+700+49=3249$.

268. Es evidente, pues, que el cuadrado de $a+1$ será $aa+2a+1$. Ahora bien, como el cuadrado de *a* es *aa*, encontramos el cuadrado de $a+1$ al añadirle $2a+1$ [a *aa*], y debemos observar que $2a+1$ es la suma de las dos raíces *a* y $a+1$.

Así, siendo 100 el cuadrado de 10, el de 11 será $100+21$. Siendo 3249 el cuadrado de 57, el de 58 es $3249+115=3364$. El cuadrado de $59=3364+117=3481$, y el de $60=3481+119=3600$, etc.

269. El cuadrado de una cantidad compuesta como $a+b$ está representado de esta manera: $(a+b)^2$. Tenemos, pues, que $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, de donde deducimos las siguientes ecuaciones: $(a+1)^2=aa+2a+1$; $(a+2)^2=aa+4a+4$; $(a+3)^2=aa+6a+9$, $(a+4)^2=aa+8a+16$, etc.

270. *Si la raíz es* $a-b$, *su cuadrado es* $aa-2ab+bb$, *que contiene también los cuadrados de los dos términos pero de una manera tal que debemos tomar, de su suma, el doble del producto de tales dos términos*.

Sean, por ejemplo, $a=10$ y $b=-1$; entonces el cuadrado de 9 será $=100-20+1=81$.

271. Debido a que tenemos la ecuación $(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$, tendremos que $(a-1)^2 = aa - 2a + 1$. *El cuadrado de* $a-1$ *lo encontramos, por lo tanto, al sustraer de aa la suma de las dos raíces a y* $a-1$, *a saber,* $2a-1$. Sea, por ejemplo, $a = 50$. Tenemos que $aa = 2500$ y $a - 1 = 49$; entonces $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

272. Lo que hemos dicho también podemos confirmarlo e ilustrarlo por medio de fracciones, porque si tomamos como raíz $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ (lo que da 1), los cuadrados serán: $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$, esto es, 1.

Además, el cuadrado de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (o de $\frac{1}{6}$) será $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

273. Cuando la raíz consiste en un mayor número de términos, el método para determinar el cuadrado es el mismo. Encontremos, por ejemplo, el cuadrado de $a + b + c$.

$$a + b + c$$
$$a + b + c$$
$$aa + ab + ac + bc$$
$$ab + ac + bb + bc + cc$$
$$aa + 2ab + 2ac + bb + 2bc + cc.$$

Vemos que *incluye, primero, al cuadrado de cada término de la raíz, y segundo, a los productos dobles de tales términos multiplicados de dos en dos*.

274. Para ejemplificar esto, dividamos el número 256 en tres partes: $200 + 50 + 6$. Su cuadrado estará entonces compuesto de las siguientes partes:

400	256
2500	256
36	____
20000	1536
2400	1280
600	512
65536	65536

que es evidentemente igual al producto de 256×256.

275. *Cuando algunos de los términos de la raíz son negativos, encontramos el cuadrado a partir de la misma regla, pero debemos tener cuidado con qué signos*

prefijamos a los productos dobles. Así, siendo $aa+bb+cc-2ab-2ac+2bc$ el cuadrado de $a-b-c$, si representamos al número 256 como $300-40-4$, tendremos

Partes positivas	*Partes negativas*
+90000	-24000
1600	-2400
320	_____
16	-26400
+91936	
-26400	

65536, el cuadrado de 256, tal como antes.

CAPÍTULO VII

DE LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES APLICADA A CANTIDADES COMPUESTAS

276. Para poder ofrecer una cierta regla de esta operación, debemos considerar con atención el cuadrado de la raíz $a+b$, que es $aa+2ab+bb$, para así poder encontrar recíprocamente la raíz de un cuadrado dado.

277. Por lo tanto, primero debemos considerar que, como el cuadrado $aa+2ab+bb$ está compuesto de varios términos, lo cierto es que la raíz también comprenderá más de un término, y que, si escribimos el cuadrado de tal forma que las potencias de uno de los términos, como *a*, puedan decrecer continuamente, el primer término será el cuadrado del primer término de la raíz. Y como en este caso el primer término del cuadrado es *aa*, lo cierto es que el primer término de la raíz es *a*.

278. Habiendo encontrado, pues, el primer término de la raíz, esto es, *a*, debemos considerar el resto del cuadrado, a saber, $2ab+bb$, para ver si de él podemos derivar la segunda parte de la raíz, que es *b*. Ahora bien, este resto $2ab+bb$ puede ser representado por el producto $(2a+b)b$. Por esto es evidente que, el resto teniendo dos factores $2a+b$ y *b*, encontraremos al último, *b*, que es la segunda parte de la raíz, al dividir el resto $2ab+bb$ entre $2a+b$.

279. Así que el cociente que surge de la división del remanente de arriba entre $2a+b$ es el segundo término de la raíz requerida. Ahora, en esta división observamos que

$2a$ es el doble del primer término *a*, que ya está determinado. Es así que, aunque el segundo término nos sea desconocido, y es necesario que por ahora dejemos ese espacio vacío, podemos intentar la división, porque en ella sólo atendemos al primer término $2a$. Tan pronto como encontremos el cociente, que aquí es *b*, debemos ponerlo en el lugar vacío, y de esta forma completar la división.

280. Por consiguiente, el cálculo por el cual encontramos la raíz del cuadrado $aa + 2ab + bb$ puede representarse como sigue:

$aa + 2ab + bb(a + b$
aa
$2a + b)2ab + bb$
$2ab + bb$
0.

281. Del mismo modo podemos encontrar la raíz cuadrada de otras cantidades compuestas siempre que éstas sean cuadrados:

$aa + 6ab + 9bb(a + 3b$
aa
$2a + 3b)6ab + 9bb$
$6ab + 9bb$
0.

$4aa - 4ab + bb(2a - b$
$4aa$
$4a - b) - 4ab + bb$
$-4ab + bb$
0.

$9pp + 24pq + 16qq(3p + 4q$
$9pp$
$6p + 4q)24pq + 16qq$
$24pq + 16qq$
0.

$25xx - 60x + 36(5x - 6$
$25xx$
$10x - 6) - 60x + 36$
$-60x + 36$
$0.$

282. Si queda un resto después de haber hecho la división, es una prueba de que la raíz está compuesta por más de dos términos. Entonces consideramos los dos términos ya encontrados como formando la primera parte, y nos abocamos a derivar del resto la otra [parte] de la misma manera que encontramos el segundo término de la raíz. Los siguientes ejemplos aclararán esta operación:

$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc(a + b - c$
aa
$2a + b)2ab - 2ac - 2bc + bb + cc$
$2ab + bb$
$2a + 2b - c) - 2ac - 2bc + cc$
$-2ac - 2bc + cc$
$0.$

$a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1(aa + a + 1$
a^4
$2aa + a)2a^3 + 3aa$
$2a^2 + aa$
$2aa + 2a + 1)2aa + 2a + 1$
$2aa + 2a + 1$
$0.$

$a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4(aa - 2ab - 2bb$
a^4
$2aa - 2ab) - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4$
$-4a^3b + 4aabb$
$2aa - 4ab - 2bb) - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$
$-4aabb + 8ab^3 + 4b^4$
$0.$

$a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6(a^3 - 3aab + 3abb - b^3$

a^6

$2a^3 - 3aab) - 6a^5b + 15a^4bb$

$-6a^5b + 9a^4bb$

$2a^3 - 6aab + 3abb)6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4$

$6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4$

$2a^3 - 6aab + 6abb - b^3) - 2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$

$-2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$

0.

283. De la regla recién explicada fácilmente deducimos el método que se enseña en los libros de aritmética para la extracción de una raíz cuadrada. Algunos ejemplos de esto, en números, son:

529(23
4
43)129
129
0.

1764(42
16
82)164
164
0.

2304(48
16
88)704
704
0.

4096(64
36
124)496
496
0.

9604(98
81
188)1504
1504
0.

15625(125
1
22)56
44
245)1225
1225
0.
998001(999
81
189)1880
1701
1989)17901
17901
0.

284. Pero si todavía queda un resto después de toda esta operación, es una prueba de que el número propuesto no es un cuadrado, y que, consecuentemente, su raíz no puede ser asignada. En casos así hacemos uso del signo radical empleado anteriormente. Este signo se escribe antes de la cantidad, y ésta se pone entre paréntesis o bajo una línea. De esta forma, la raíz cuadrada de $aa+bb$ está representada por $\sqrt{(aa+bb)}$ o por $\sqrt{aa+bb}$, y $\sqrt{(1-xx)}$ o $\sqrt{1-xx}$ expresa la raíz cuadrada de $1-xx$. En lugar de este signo radical podemos

utilizar el exponente fraccional $\frac{1}{2}$ y representar la raíz cuadrada de $aa+bb$, por ejemplo, como $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$.

CAPÍTULO VIII

DEL CÁLCULO DE CANTIDADES IRRACIONALES

285. Cuando se requiere añadir dos o más cantidades irracionales, lo hacemos de acuerdo con el método expuesto antes, esto es, escribiendo todos los términos en sucesión cada uno con su signo apropiado. Con respecto a la abreviación, debemos notar que *en lugar de* $\sqrt{a}+\sqrt{a}$, por ejemplo, *escribimos* $2\sqrt{a}$; *y que* $\sqrt{a}-\sqrt{a}=0$ porque estos dos términos se destruyen entre sí. De esta forma, *las cantidades* $3+\sqrt{2}$ *y* $1+\sqrt{2}$, *añadidas juntas, hacen* $4+2\sqrt{2}$ *o* $4+\sqrt{8}$; la suma de $5+\sqrt{3}$ y $4-\sqrt{3}$ es 9, y la de $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ es $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

286. La sustracción también es muy fácil, porque sólo tenemos que añadir los números propuestos cambiando antes sus signos. El siguiente ejemplo nos mostrará esto. Sustraigamos el número de abajo del de arriba:

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

287. En el caso de la multiplicación debemos recordar que $\sqrt{a}$ *multiplicado por* $\sqrt{a}$ *produce a*, y que *si los números que siguen al signo* √ *son distintos,* como *a* y *b*, *entonces tenemos* $\sqrt{ab}$ *para el producto de* $\sqrt{a}$ *multiplicado por* $\sqrt{b}$. Después de esto será fácil desarrollar los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}+2 \\ 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

$4+2\sqrt{2}$
$2-\sqrt{2}$
$8+4\sqrt{2}$
$-4\sqrt{2}-4$
$8-4=4.$

288. Lo que hemos dicho aplica también para cantidades imaginarias, y únicamente debemos observar que $\sqrt{-a}$ *multiplicado por* $\sqrt{-a}$ *produce* $-a$.

Si se requiriese encontrar el cubo de $-1+\sqrt{-3}$, debemos tomar el cuadrado de tal número y después multiplicar tal cuadrado por tal número. Veamos, pues, la operación:

$-1+\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$
$1-\sqrt{-3}$
$-\sqrt{-3}-3$
$1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}$
$-1+\sqrt{-3}$
$2+2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}+6$
$2+6=8.$

289. *En la división de números irracionales, sólo tenemos que expresar las cantidades propuestas en la forma de una fracción; después, esto puede cambiarse a otra expresión que tenga un denominador racional*. Y esto porque si el denominador es $a+\sqrt{b}$, por ejemplo, y si multiplicamos tanto a éste como al numerador por $a-\sqrt{b}$, el nuevo denominador será $aa-b$, en donde no hay signo radical alguno. Propóngase dividir $3+2\sqrt{2}$ entre $1+\sqrt{2}$; primero tendremos $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Al multiplicar los dos términos de la fracción por $1-\sqrt{2}$ tendremos, como numerador,

$$3+2\sqrt{2}$$
$$1-\sqrt{2}$$
$$3+2\sqrt{2}$$
$$-3\sqrt{2}-4$$
$$3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1;$$

y como denominador,

$$1+\sqrt{2}$$
$$1-\sqrt{2}$$
$$1+\sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2}-2$$
$$1-2=-1.$$

Nuestra nueva fracción es, por tanto, $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$, y si, de nuevo, multiplicamos sus dos términos por -1, tendremos, como numerador, $\sqrt{2}+1$, y como numerador $+1$. Ahora bien, es fácil mostrar que $\sqrt{2}+1$ es igual a la fracción propuesta $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, porque $\sqrt{2}+1$ multiplicado por el divisor $1+\sqrt{2}$ de la siguiente forma

$$1+\sqrt{2}$$
$$1+\sqrt{2}$$
$$1+\sqrt{2}$$
$$+\sqrt{2}+2$$

produce $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$.

Un ejemplo más: $8-5\sqrt{2}$ dividido entre $3-2\sqrt{2}$ hace $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Multiplicando los dos términos de esta fracción por $3+2\sqrt{2}$ tenemos, como numerador,

$$8-5\sqrt{2}$$
$$3+2\sqrt{2}$$
$$24-15\sqrt{2}$$
$$+16\sqrt{2}-20$$
$$24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2},$$

y como denominador,

$$3-2\sqrt{2}$$
$$3+2\sqrt{2}$$
$$9-6\sqrt{2}$$
$$+6\sqrt{2}-8$$
$$9-8=1.$$

Consecuentemente, el cociente será $4+\sqrt{2}$. La verdad de esto puede probarse de la siguiente forma:

$$4+\sqrt{2}$$
$$3-2\sqrt{2}$$
$$12+3\sqrt{2}$$
$$-8\sqrt{2}-4$$
$$12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}.$$

290. Del mismo modo, podemos transformar tales fracciones en otras que tengan denominadores racionales. Si tenemos, por ejemplo, la fracción $\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$ y multiplicamos su numerador y su denominador por $5+2\sqrt{6}$, la transformamos en $\frac{5+2\sqrt{6}}{1}=5+2\sqrt{6}$. De igual forma, la fracción $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ asume la forma $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$, y $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}=11+2\sqrt{30}$.

291. *Cuando el denominador contiene varios términos podemos, del mismo modo, hacer desaparecer los signos radicales de uno en uno.* Propóngase la fracción $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$. Primero multiplicamos estos términos por $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y obtenemos la fracción $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$. Después, multiplicando el numerador y el denominador de esta fracción por $3+2\sqrt{6}$, tenemos $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CAPÍTULO IX

DE CUBOS Y DE LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES CÚBICAS

292. Para encontrar el cubo de una raíz $a+b$, únicamente multiplicamos su cuadrado, $aa+2ab+bb$, de nuevo por $a+b$ así

$$aa+2ab+bb$$
$$a+b$$
$$a^3+2aab+abb$$
$$aab+2abb+b^3$$

y el cubo será $=a^3+3aab+3abb+b^3$.

Este cubo *contiene los cubos de las dos partes de las raíces y*, además, $3aab+3abb$, una cantidad igual a $(3ab)\times(a+b)$, esto es, *el triple producto de las dos partes, a* y *b, multiplicado por su suma*.

293. Así que siempre que una raíz esté compuesta de dos términos, es fácil encontrar su cubo por medio de esta regla. Por ejemplo, del número $5=3+2$, su cubo es $27+8+18\times5=125$. Sea $7+3=10$ la raíz. Entonces su cubo será $343+27+63\times10=1000$. Para encontrar el cubo de 36, supongamos la raíz $36=30+6$ y tendremos, por la potencia requerida, $27000+216+540\times36=46656$.

294. Si, por otra parte, el cubo ya está dado - como en $a^3+3aab+3abb+b^3$ - y se requiere encontrar su raíz, debemos sentar como premisa las siguientes observaciones:

Primero, cuando el cubo está acomodado de acuerdo con las potencias de una letra, fácilmente conocemos, por el primer término a^3, el primer término *a* de la raíz, ya que su cubo es a^3; si, por lo tanto, sustraemos este cubo del cubo propuesto, obtenemos el resto $3aab+3abb+b^3$, que deberá proporcionarnos el segundo término de la raíz.

295. Pero como ya sabemos que el segundo término es $+b$, mayormente tenemos que descubrir cómo puede derivarse del resto de arriba. Ahora, ese resto puede expresarse por dos factores como $(3aa+3ab+bb)\times(b)$; si, por tanto, dividimos entre $3aa+3ab+bb$, obtendremos la segunda parte de la raíz, $+b$, que es lo requerido.

296. Pero como este segundo término está supuesto a ser desconocido, también el divisor es desconocido. No obstante esto, tenemos el primer término de tal divisor, y con ello es suficiente porque es $3aa$, es decir, tres veces el cuadrado del primer término ya

encontrado. Por medio de esto, no es difícil encontrar la otra parte, *b*, y después completar el divisor antes de llevar a cabo la división. Para este propósito será necesario unir a $3aa$ el triple del producto de los dos términos, o $3ab$, y bb, o el cuadrado del segundo término de la raíz.

297. Apliquemos lo dicho a dos ejemplos de otros cubos dados.

$a^3 + 12aa + 48a + 64(a + 4$

a^3

I. $3aa + 12a + 16)12aa + 48a + 64$

$12aa + 48a + 64$

0.

$a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15aa - 6a + 1(aa - 2a + 1$

a^6

$3a^4 - 6a^3 + 4aa) - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3$

II. $-6a^5 + 12a^4 - 8a^3$

$3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1)3a^4 - 12a^3 + 15aa - 6a + 1$

$3a^4 - 12a^3 + 15aa - 6a + 1$

0.

298. El análisis recién ofrecido es el fundamento de la regla común para la extracción de una raíz cúbica en números. Un ejemplo de la operación, en el número 2197:

$2197(10 + 3 = 13$

1000

300 1197

90

9

399 1197

0.

Extraigamos también la raíz cúbica de 34965783:

$34965783(300 + 20 + 7$

27000000

270000 7965783

18000

400

288400 5768000

307200 2197783

6720

49

313969 2197783

0.

CAPÍTULO X

DE LAS POTENCIAS MÁS GRANDES DE CANTIDADES COMPUESTAS

299. Después de los cuadrados y de los cubos vienen las potencias grandes o las potencias de un número mayor de grados. Estas potencias están representadas por exponentes de la misma forma en que hemos venido explicando, y sólo debemos recordar que, cuando la raíz es compuesta, debemos ponerla entre paréntesis. Así, $(a+b)^5$ significa $a+b$ elevado al quinto grado, y $(a-b)^6$ representa la sexta potencia de $a-b$. En este capítulo explicaremos la naturaleza de estas potencias.

300. Sea $a+b$ la raíz o la primera potencia; entonces encontraremos sus potencias más grandes al multiplicar de la siguiente forma:

$$(a+b)^1 = a+b$$
$$a+b$$
$$aa+ab$$
$$+ab+bb$$

$$(a+b)^2 = aa+2ab+bb$$
$$a+b$$
$$a^3+2aab+abb$$
$$+aab+2abb+b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$
$$a+b$$
$$a^4 + 3a^3b + 3aabb + ab^3$$
$$+ a^3b + 3aabb + 3ab + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$$
$$a+b$$
$$a^5 + 4a^4b + 6a^3bb + 4aab^3 + ab^4$$
$$+ a^4b + 4a^3bb + 6aab^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$a+b$$
$$a^5 + 5a^5b + 10a^4bb + 10a^3b^3 + 5a^2b^4 + ab^5$$
$$+ a^5b + 5a^4bb + 10a^3b^3 + 10aab^4 + 5ab^5 + b^6$$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^6$, etc.

301. Las potencias de la raíz $a-b$ se encuentran de la misma forma, e inmediatamente percibimos que no difieren de las precedentes excepto en que los términos segundo, cuarto, sexto, etc., están afectados por el signo de *menos*:

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$aa - ab$$
$$- ab + bb$$

$$(a-b)^2 = aa - 2ab + bb$$
$$a-b$$
$$a^3 - 2aab + abb$$
$$- aab + 2abb - b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3aab + 3abb - b^3$$
$$a - b$$
$$a^4 - 3a^3b + 3aabb - ab^3$$
$$-a^3b + 3aabb - 3ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4$$
$$a - b$$
$$a^5 - 4a^4b + 6a^3bb - 4aab^3 + ab^4$$
$$-a^4b + 4a^3bb - 6aab^3 + 4ab^4 - b^5$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$a - b$$
$$a^6 - 5a^5b + 10a^4bb - 10a^3b^3 + 5aab^4 - ab^5$$
$$-a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10aab^4 - 5ab^5 + b^6$$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6$, etc.

En este caso vemos que las potencias nones de b tienen el signo -, mientras que las pares tienen el signo +. La razón de esto es evidente, porque como $-b$ es un término de la raíz, las potencias de tal letra ascenderán en la siguiente serie: $-b, +bb, -b^3, +b^4, -b^5, +b^6$, etc., lo que claramente muestra que las potencias pares deben estar afectadas por el signo + mientras que las nones por el signo contrario, -.

302. Aquí tiene lugar una cuestión importante, a saber, cómo podemos encontrar, sin estar obligados a realizar siempre el mismo cálculo, todas las potencias ya sean de $a+b$ o de $a-b$.

Debemos observar, en primer lugar, que si podemos asignar todas las potencias de $a+b$, también encontraremos las de $a-b$, ya que sólo debemos cambiar los signos de los términos pares, esto es, del segundo [término], del cuarto, del sexto, etc. El meollo del asunto consiste, pues, en establecer una regla por la cual *cualquier potencia de* $a+b$*, sin importar qué tan grande sea, pueda ser determinada sin recurrir al cálculo de todas las [potencias] precedentes*.

303. Ahora bien, si de las potencias que ya hemos determinado quitamos los números que preceden a cada término, a los que llamamos *coeficientes*, notamos, en todos los términos, un orden singular. *Vemos, primero, el primer término a de la raíz elevado a la potencia requerida. En los siguientes términos las potencias de a disminuyen continuamente en una unidad a la vez que las potencias de b aumentan en la misma proporción, así que la suma de los exponentes de a y de b es siempre la misma y es siempre igual al exponente de la potencia requerida. Por último, encontramos el término b elevado por sí mismo a la misma potencia*. Si, por lo tanto, se requiriese la décima potencia de $a+b$, es seguro que los términos, sin sus coeficientes, se sucederán entre sí en el siguiente orden: $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, ab^9, b^{10}$.

304. Queda, pues, por mostrar cómo hemos de determinar los coeficientes pertenecientes a tales términos, o los números por los cuales han de ser multiplicados. Ahora, *con respecto al primer término, su coeficiente es siempre una unidad, y con respecto al segundo, su coeficiente es de manera constante el exponente de la potencia*. Con respecto a los demás términos no resulta tan fácil observar algún orden en sus coeficientes. Sin embargo, si continuamos con tales coeficientes no tardaremos mucho en descubrir una ley por la cual podamos avanzar tanto como nos plazca. Esta ley la muestra la siguiente tabla:

Potencias	*Coeficientes*
I.	1,1
II.	1,2,1
III.	1,3,3,1
IV.	1,4,6,4,1
V.	1,5,10,10,5,1
VI.	1,6,15,20,15,6,1
VII.	1,7,21,35,35,21,7,1
VIII.	1,8,28,56,70,56,28,8,1
IX.	1,9,36,84,126,126,84,36,9,1
X.	1,10,45,120,210,252,210,120,45,10,1, etc.

Vemos, entonces, que la décima potencia de $a+b$ será $a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45aab^8$ $+10ab^9+b^{10}$.

305. *Con respecto a los coeficientes, debemos observar que para cada potencia su suma debe ser igual al número 2 elevado a la misma potencia*. Sean $a=1$ y $b=1$. Cada término sin coeficientes será $=1$; consecuentemente, el valor de la potencia será simplemente la suma de los coeficientes. Esta suma, en el ejemplo precedente, es 1024, así que, de acuerdo con esto, $(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.

Es lo mismo con respecto a otras potencias, porque tenemos que

I. $1+1=2=2^1$

II. $1+2+1=4=2^2$

III. $1+3+3+1=8=2^3$

IV. $1+4+6+4+1=16=2^4$

V. $1+5+10+10+5+1=32=2^5$

VI. $1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$

VII. $1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$, etc.

306. Otra observación necesaria con respecto a los coeficientes es que aumentan desde el comienzo hasta la mitad y después disminuyen en el mismo orden. En las potencias pares, el mayor de los coeficientes se encuentra exactamente a la mitad, mientras que en las nones a la mitad se encuentran dos coeficientes, iguales entre sí y mayores que los otros, pertenecientes a los términos medios.

El orden de los coeficientes merece una atención especial, porque es en este orden en el que descubrimos los medios para determinarlos para cualquier potencia sin tener que calcular todas las [potencias] precedentes. Explicaremos en qué consiste este método reservando la demostración para el siguiente capítulo.

307. *Para encontrar los coeficientes de cualquier potencia propuesta (la séptima, por ejemplo), escribamos las siguientes fracciones una después de otra:*

$$\frac{7}{1},\frac{6}{2},\frac{5}{3},\frac{4}{4},\frac{3}{5},\frac{2}{6},\frac{1}{7}.$$

En este arreglo percibimos que los numeradores comienzan por el exponente de la potencia requerida y que disminuyen sucesivamente en una unidad, mientras que los denominadores se siguen en el orden natural de los números, 1, 2, 3, 4, etc. Ahora, siendo siempre 1 el primer coeficiente, la primera fracción nos da el segundo coeficiente. El producto de las dos primeras fracciones multiplicadas juntas representa el tercer coeficiente. El producto de las tres primeras fracciones representa el cuarto coeficiente, y así sucesivamente.

De esta forma, el primer coeficiente $=1$; el segundo $=\frac{7}{1}=7$; el tercero $=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}=21$; el cuarto $=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}=35$; el quinto $=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}=35$; el sexto $=\frac{7}{1}\times\frac{6}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{4}{4}\times\frac{3}{5}=21$; el séptimo $=21\times\frac{2}{6}=7$, y el octavo $=7\times\frac{1}{7}=1$.

308. Así es que tenemos, para la segunda potencia, las dos fracciones $\frac{2}{1},\frac{1}{2}$, de donde se sigue que el primer coeficiente $=1$; el segundo $=\frac{2}{1}=2$, y el tercero $=2\times\frac{1}{2}=1$. La tercera potencia proporciona las fracciones $\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}$, y de aquí que el primer coeficiente $=1$; el segundo $=\frac{3}{1}=3$; el tercero $=3\times\frac{2}{2}=3$, y el cuarto $=\frac{3}{1}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{3}=1$. Para la cuarta potencia tenemos las fracciones $\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}$; consecuentemente el primer coeficiente $=1$; el segundo $=\frac{4}{1}=4$; el tercero $=\frac{4}{1}\times\frac{3}{2}=6$; el cuarto $=\frac{4}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=4$, y el quinto $=\frac{4}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=1$.

309. Es evidente que esta regla hace innecesario que debamos encontrar los coeficientes anteriores y nos permite descubrir, de manera inmediata, los coeficientes que pertenecen a cualquier potencia. Así, para la décima potencia escribimos las fracciones $\frac{10}{1},\frac{9}{2},\frac{8}{3},\frac{7}{4},\frac{6}{5},\frac{5}{6},\frac{4}{7},\frac{3}{8},\frac{2}{9},\frac{1}{10}$, por medio de las cuales encontramos que

el primer coeficiente $=1$,

el segundo $=\frac{10}{1}=10$,

el tercero $=10\times\frac{9}{2}=45$,

el cuarto $=45\times\frac{8}{3}=120$,

el quinto $=120\times\frac{7}{4}=210$,

el sexto $=210\times\frac{6}{5}=252$,

el séptimo $=252\times\frac{5}{6}=210$,

el octavo $=210\times\frac{4}{7}=120$,

el noveno $=120\times\frac{3}{8}=45$,

el décimo $=45\times\frac{2}{9}=10$,

y el décimo primero $=10\times\frac{1}{10}=1$.

310. También podemos escribir estas fracciones tal como están, sin necesidad de calcular su valor, y de esta manera es fácil expresar cualquier potencia de $a+b$ sin importar qué tan grande sea. Así, la centésima potencia de $a+b$ será

$$(a+b)^{100}=a^{100}+\frac{100}{1}\times a^{99}b+\frac{100\times 99}{1\times 2}+a^{98}b^{2}+\frac{100\times 99\times 98}{1\times 2\times 3}a^{97}b^{3}+\frac{100\times 99\times 98\times 97}{1\times 2\times 3\times 4}a^{96}b^{4}...$$

De aquí puede deducirse fácilmente la ley para los términos subsiguientes.

CAPÍTULO XI

DE LA TRANSPOSICIÓN DE LAS LETRAS, SOBRE LA CUAL ESTÁ FUNDADA LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA ANTERIOR

311. Si rastreamos el origen de los coeficientes que hemos venido considerando, descubriremos que cada término se presenta tantas veces como sea posible transponer las

letras por las cuales tal término está compuesto; o, para expresar lo mismo de manera distinta, el coeficiente de cada término es igual al número de transposiciones que admiten las letras por las cuales tal término está compuesto. En la segunda potencia, por ejemplo, el término *ab* es tomado dos veces, esto es, su coeficiente es 2. En efecto, podemos cambiar el orden de las letras que componen tal término dos veces, porque podemos escribir *ab* y *ba*. El término *aa*, por el contrario, se encuentra sólo una vez, porque el orden de las letras no puede sufrir cambio o transposición alguna. En la tercera potencia de $a+b$, el término *aab* puede escribirse de tres maneras distintas: *aab*, *aba*, *baa*, y de aquí que su coeficiente sea 3. Del mismo modo, en la cuarta potencia el término a^3b o *aaab* admite cuatro arreglos distintos: *aaab*, *aaba*, *abaa*, *baaa*; por lo tanto, su coeficiente es 4. El término *aabb* admite seis transposiciones: *aabb*, *abba*, *baba*, *abab*, *bbaa*, *baab*, y su coeficiente es 6. Es lo mismo para todos los casos.

312. De hecho, si consideramos que la cuarta potencia, por ejemplo, de cualquier raíz consistente en más de dos términos, como $(a+b+c+d)^4$, la encontramos al multiplicar los cuatro factores I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, y IV. $a+b+c+d$, fácilmente podemos ver que cada letra del primer factor debe multiplicarse por cada letra del segundo [factor], después por cada letra del tercero, y por último, por cada letra del cuarto.

Cada término debe, por lo tanto, no sólo estar compuesto de cuatro letras, sino también presentarse, o entrar en la suma, tantas veces como tales letras puedan ser arregladas de manera distinta con respecto a cada otra [letra], de donde surge su coeficiente.

313. Es, por consiguiente, muy importante saber de cuántas maneras distintas puede arreglarse un número dado de letras. En esta indagación debemos considerar particularmente si las letras en cuestión son las mismas o si son distintas. Cuando son las mismas, no puede haber transposición alguna, y es por esta razón que potencias simples como a^2, a^3, a^4, etc., tienen todas una unidad por coeficiente.

314. Supongamos, primero, que todas las letras son distintas, y comenzando con el caso más simple de dos letras, o *ab*, inmediatamente descubrimos que pueden tener lugar dos transposiciones, a saber, *ab* y *ba*.

Si consideramos tres letras, *abc*, observamos que cada una de las tres puede tomar el primer lugar, mientras que las otras dos admitirán dos transposiciones. Esto porque si *a* es

la primera letra, tenemos dos arreglos, *abc*, *acb*; si *b* ocupa el primer lugar tenemos los arreglos *bac*, *bca*, y, por último, si es *c* la que ocupa el primer lugar tenemos también dos arreglos, a saber, *cab*, *cba*. Consecuentemente, el número total de arreglos es $3 \times 2 = 6$.

Si hay cuatro letras, *abcd*, cada una puede ocupar el primer lugar, y en cada caso las otras tres letras pueden formar seis arreglos distintos, tal como hemos visto. El número total de transposiciones es, por lo tanto, $4 \times 6 = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Si hay cinco letras, *abcde*, cada una de las cinco debe ser la primera, y las otras cuatro admitirán veinticuatro transposiciones, de tal forma que el número total de transposiciones será $5 \times 24 = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

315. De esta forma, sin importar qué tan grande pueda ser el número de letras, es evidente que, siempre que sean todas distintas, podemos determinar fácilmente el número de transposiciones. Para esto podemos recurrir a la siguiente tabla:

Número de letras	*Número de transposiciones*
I.	$1 = 1$
II.	$2 \times 1 = 2$
III.	$3 \times 2 \times 1 = 6$
IV.	$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
V.	$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
VI.	$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
VII.	$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
VIII.	$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$
IX.	$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$
X.	$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3628800$.

316. Pero, tal como hemos indicado, sólo podemos hacer uso de los números de esta tabla cuando todas las letras sean distintas, porque si dos o más de ellas son iguales, el número de transposiciones se vuelve mucho menor; y si todas las letras son iguales, solamente tendremos un arreglo posible. Ahora veremos cómo han de disminuirse los números en la tabla de acuerdo con el número de letras iguales.

317. Cuando están dadas dos letras, y éstas son iguales, los dos arreglos se reducen a uno y, consecuentemente, el número que hemos encontrado arriba se reduce a la mitad, esto es, debe dividirse entre 2. Si tenemos tres letras iguales, las seis transposiciones se

reducen a una, de donde se sigue que los números en la tabla deben dividirse entre $6 = 3 \times 2 \times 1$. Por la misma razón, si cuatro letras son iguales, debemos dividir los números encontrados entre 24 o entre $4 \times 3 \times 2 \times 1$, y así para los demás casos.

Es fácil, pues, determinar cuántas transposiciones pueden padecer las letras *aaabbc*, por ejemplo. En número son 6, y es por esto que, si fuesen todas distintas, admitirían $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ transposiciones. Pero debido a que *a* está tres veces en tales letras, debemos dividir ese número de transposiciones entre $3 \times 2 \times 1$; y como *b* tiene lugar dos veces, debemos dividir de nuevo tal número entre 2×1. De esta forma, el número de transposiciones requerido será $= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

318. Ahora nos será más fácil determinar los coeficientes de todos los términos de cualquier potencia. Para este propósito, ofreceremos un ejemplo de la séptima potencia $(a+b)^7$.

El primer término es a^7, que tiene lugar sólo una vez, y como todos los otros términos tienen cada uno siete letras, se sigue que el número de transposiciones para cada uno de ellos sería $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ si todas las letras fuesen distintas. Pero como en el segundo término, $a^6 b$, encontramos seis letras iguales, debemos dividir el producto anterior entre $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, de donde se sigue que el coeficiente es $= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7}{1}$.

En el tercer término, $a^5 bb$, encontramos la misma letra *a* cinco veces y la misma letra *b* dos veces. Por lo tanto, debemos dividir tal número primero entre $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ y después entre 2×1, de donde resulta el coeficiente $\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{1 \times 2}$ [=21]. [2]

El cuarto término, $a^4 b^3$, contiene la letra *a* cuatro veces y la letra *b* tres veces. Consecuentemente, el número total de transposiciones de las siete letras ha de dividirse, primero, entre $4 \times 3 \times 2 \times 1$, y después entre $3 \times 2 \times 1$, y así el segundo coeficiente se vuelve $= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$ [=35].

[2] Los corchetes son míos. Nota del Traductor.

Del mismo modo, encontramos $\frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4}$ para el coeficiente del quinto término, y así sucesivamente para el resto, por lo cual se demuestra la regla antes establecida.

319. Estas consideraciones nos llevan más lejos y también nos muestran cómo encontrar todas las potencias de las raíces compuestas por más de dos términos. Aplicaremos estas consideraciones a la tercera potencia de $a+b+c$, cuyos términos deben estar formados por todas las posibles combinaciones de estas tres letras, cada término teniendo, como coeficiente, el número de sus transposiciones, al igual que arriba.

Sin realizar la multiplicación, la tercera potencia de $(a+b+c)$ será $a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bb+3bcc+c^3$.

Supongamos que $a=1$, $b=1$, y $c=1$; entonces el cubo de 1+1+1, o de 3, será 1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27. Este resultado es exacto y confirma la regla.

Si suponemos que $a=1$, $b=1$, y $c=-1$, encontraremos, para el cubo de $1+1-1$, o de 1, $1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1$.

CAPÍTULO XII

DE LAS EXPRESIONES DE POTENCIAS IRRACIONALES POR SERIES INFINITAS

320. Ya habiendo mostrado el método para encontrar cualquier potencia de la raíz $a+b$ sin importar qué tan grande sea el exponente, podemos expresar, de manera general, la potencia de $a+b$ si su exponente no está determinado. Es evidente que si representamos tal exponente como *n*, tendremos, por la regla ya ofrecida (art. 307 y siguientes),

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$$

$$\times\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 +, \text{ etc.}$$

321. Si se requiriese la misma potencia de la raíz $a-b$, sólo habremos de cambiar los signos del segundo, cuarto, sexto, etc., términos y tendríamos

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}$$

$\times \frac{n-3}{4} a^{n-4} b^4 -$, etc.

322. Estas fórmulas resultan sumamente útiles, porque también sirven para expresar todo tipo de radicales. Ya vimos que todas las cantidades irracionales pueden asumir la forma de potencias cuyos exponentes sean fraccionales, y que $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, y $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, etc. Por lo tanto, también tenemos que $\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, y $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$, etc.

De aquí que, si queremos encontrar la raíz cuadrada de $a+b$, sólo tenemos que sustituir la fracción $\frac{1}{2}$ por el exponente *n* en la fórmula general (art. 320) y primero tendremos, para los coeficientes, $\frac{n}{1} = \frac{1}{2}; \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}; \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}; \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}; \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}; \frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$, etc., o bien podemos expresar tales potencias de *a* de la siguiente forma: $a^n = \sqrt{a}; a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}; a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}; a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}; a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$, etc.

323. Una vez establecido esto, la raíz cuadrada de $a+b$ puede expresarse de la siguiente manera:

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2} b \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} bb \frac{\sqrt{a}}{aa} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} b^3 \frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{6} \times \frac{5}{8} b^4 \frac{\sqrt{a}}{a^4}, \text{ etc.}$$

324. Si *a* es, pues, un número cuadrado, podemos asignar el valor de $\sqrt{a}$ y, consecuentemente, podemos expresar la raíz cuadrada de $a+b$ a partir de una serie infinita sin signo radical alguno.

Si, por ejemplo, $a = cc$, tendremos que $\sqrt{a} = c$. Entonces

$$\sqrt{(cc+b)} = c + \frac{1}{2} \times \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \times \frac{bb}{c^3} + \frac{1}{16} \times \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \times \frac{b^4}{c^7}, \text{ etc.}$$

Podemos ver, por lo tanto, que no hay ningún número cuya raíz cuadrada no pueda ser extraída de la misma forma, ya que cada número puede resolverse en dos partes, una de las cuales es un cuadrado representado por *cc*. Si requiriésemos, por ejemplo, la raíz

cuadrada de 6, hacemos que $6 = 4 + 2$; consecuentemente, $cc = 4$, $c = 2$, y $b = 2$, de donde resulta que $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$, etc.

Si tomamos únicamente los dos términos principales de esta serie, tendremos $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, cuyo cuadrado, $\frac{25}{4}$, es mayor que 6 por $\frac{1}{4}$. Si consideramos tres términos tendremos $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, cuyo cuadrado, $\frac{1521}{256}$, sigue siendo muy pequeño por $\frac{15}{256}$.

325. Como en este ejemplo $\frac{5}{2}$ se aproxima mucho al verdadero valor de $\sqrt{6}$, para 6 tomaremos la cantidad equivalente $\frac{25}{4} - \frac{1}{4}$. Así, $cc = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, y $b = \frac{1}{4}$, y calculando sólo los dos términos principales encontramos que $\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$. Siendo $\frac{2401}{400}$ el cuadrado de esta fracción, excede al cuadrado de $\sqrt{6}$ únicamente por $\frac{1}{400}$.

Ahora, haciendo que $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$ de tal forma que $c = \frac{49}{20}$ y $b = -\frac{1}{400}$, y volviendo a tomar solamente los dos términos principales, tenemos que $\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} - \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} - \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$, cuyo cuadrado es $\frac{23049601}{3841600}$.

Ahora bien, 6 reducido al mismo denominador es $= \frac{23049600}{3841600}$, y por tanto el error es sólo $\frac{1}{3841600}$.

326. Del mismo modo, podemos expresar la raíz cúbica de $a + b$ por una serie infinita. Esto debido a que, como $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, en la fórmula general tendremos que $n = \frac{1}{3}$, y para los coeficientes, $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}; \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}; \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}; \frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}; \frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$, etc.

Con respecto a las potencias de a tendremos $a^n = \sqrt[3]{a}; a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}; a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}; a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$, etc. Entonces $\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3} \times b \frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9} \times bb \frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \frac{5}{81} \times b^3 \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243} \times b^4 \frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$, etcétera.

327. Así pues, si a es un cubo, o $a = c^3$, tenemos que $\sqrt[3]{a} = c$ y los signos radicales desaparecerán, porque $\sqrt[3]{(a+b)} = c + \frac{1}{3} \times \frac{b}{cc} - \frac{1}{9} \times \frac{bb}{c^5} + \frac{5}{81} \times \frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243} \times \frac{b^4}{c^{11}}$, y así sucesivamente.

328. Es así que hemos llegado a una fórmula que nos permitirá encontrar, *por aproximación*, como suele llamársele, la raíz cúbica de cualquier número, ya que todo número puede ser resuelto en dos partes, como $c^3 + b$, cuya primera de ellas es un cubo.

Si queremos, por ejemplo, determinar la raíz cúbica de 2, representamos 2 por 1+1, así que, siendo $c = 1$ y $b = 1$, consecuentemente $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$, etc. Los dos términos principales de esta serie dan $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, cuyo cubo, $\frac{64}{27}$, es demasiado grande por $\frac{10}{27}$. Hagamos, pues, que $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, y entonces tenemos que $c = \frac{4}{3}$ y $b = -\frac{10}{27}$; consecuentemente, $\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Estos dos términos dan $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, cuyo cubo es $\frac{753571}{373248}$. Ahora, $2 = \frac{746496}{373248}$, así que el error es $\frac{7075}{373248}$. De esta manera podríamos seguir aproximándonos al valor requerido, y más rápido, en proporción, a medida que consideremos un mayor número de términos.

CAPÍTULO XIII

DE LA RESOLUCIÓN DE POTENCIAS NEGATIVAS

329. Ya hemos mostrado que podemos expresar $\frac{1}{a}$ como a^{-1}. Por consiguiente, también podemos expresar $\frac{1}{a+b}$ como $(a+b)^{-1}$, de tal manera que la fracción $\frac{1}{a+b}$ puede considerarse como una potencia de $a+b$, a saber, la potencia cuyo exponente es -1. De esto se sigue que la serie ya encontrada como el valor de $(a+b)^n$ se extiende también para este caso.

330. Ya que $\frac{1}{a+b}$ es lo mismo que $(a+b)^{-1}$, supongamos, en la fórmula general, que $n=-1$. Primero tendremos, para los coeficientes, que $\frac{n}{1}=-1;\frac{n-1}{2}=-1;\frac{n-2}{3}=-1;\frac{n-3}{4}=-1$, etc. Entonces, para las potencias de *a*, $a^n=a^{-1}=\frac{1}{a};a^{n-1}=a^{-2}=\frac{1}{a^2};a^{n-2}=\frac{1}{a^3};a^{n-3}=\frac{1}{a^4}$, etc., así que $(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$, etc., y ésta es la misma serie que encontramos antes por división.

331. Además, siendo $\frac{1}{(a+b)^2}$ lo mismo que $(a+b)^{-2}$, reduzcamos también esta cantidad a una serie infinita. Para este propósito debemos suponer que $n=-2$, y entonces para los coeficientes tendremos que $\frac{n}{1}=-\frac{2}{1};\frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2};\frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3};\frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4}$, etc., y para las potencias de *a* tenemos que $a^n=\frac{1}{a^2};a^{n-1}=\frac{1}{a^3};a^{n-2}=\frac{1}{a^4};a^{-3}=\frac{1}{a^5}$, etc. Por lo tanto, obtenemos $(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^4}-\frac{2}{1}\times\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{bb}{a^4}-\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{b^3}{a^5}+\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{b^4}{a^5}$, etc.

Ahora bien, $\frac{2}{1}=2;\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}=3;\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=4;\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}=5$, etc. Consecuentemente, tenemos que $\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{aa}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{bb}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}+7\frac{b^6}{a^8}$, etcétera.

332. Procedamos y supongamos que $n=-3$. Tendremos, pues, una serie expresando el valor de $\frac{1}{(a+b)^3}$ o de $(a+b)^{-3}$. Los coeficientes serán $\frac{n}{1}=-\frac{3}{1};\frac{n-1}{2}=-\frac{4}{2};\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{3};\frac{n-3}{4}=-\frac{6}{4}$, etc., y las potencias de a se vuelven $a^n=\frac{1}{a^3};a^{n-1}=\frac{1}{a^4};a^{n-2}=\frac{1}{a^5}$, etc., lo que da

$$\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a^3}-\frac{3}{1}\times\frac{b}{a^4}+\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{bb}{a^5}-\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{b^3}{a^6}+\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\frac{b^4}{a^7}, \quad \text{etc.,}$$

$$=\frac{1}{a^3}-3\frac{b}{a^4}+6\frac{bb}{a^5}-10\frac{b^3}{a^6}+15\frac{b^4}{a^7}-21\frac{b^5}{a^8}+28\frac{b^6}{a^9}-36\frac{b^7}{a^{10}}+45\frac{b^8}{a^{11}}, \text{ etcétera.}$$

Ahora hagamos que $n=-4$ y tendremos, para los coeficientes, $\frac{n}{1}=-\frac{4}{1};\frac{n-1}{2}=-\frac{5}{2};\frac{n-2}{3}=-\frac{6}{3};\frac{n-3}{4}=-\frac{7}{4}$, etc., y para las potencias de a, $a^n=\frac{1}{a^4};a^{n-1}=\frac{1}{a^5};a^{n-2}=\frac{1}{a^6};a^{n-3}=\frac{1}{a^7};a^{n-4}=\frac{1}{a^8}$, etc.; de donde obtenemos

$$\frac{1}{(a+b)^4}=\frac{1}{a^4}-\frac{4}{1}\times\frac{b}{a^5}+\frac{4}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{bb}{a^6}-\frac{4}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{6}{3}\times\frac{b^3}{a^7}+\frac{4}{1}\times\frac{5}{2}\times\frac{6}{3}\times\frac{7}{4}\times\frac{b^4}{a^8}, \quad \text{etc.,}$$

$$=\frac{1}{a^4}-4\frac{b}{a^5}+10\frac{bb}{a^6}-20\frac{b^3}{a^7}+35\frac{b^4}{a^8}-56\frac{b^5}{a^9}, \text{ etcétera.}$$

333. Los distintos casos que hemos venido considerando nos permiten concluir, con certeza, que para cualquier potencia negativa de $a+b$ tendremos

$$\frac{1}{(a+b)^m}=\frac{1}{a^m}-\frac{m}{1}\times\frac{b}{a^{m+1}}+\frac{m}{1}\times\frac{m+1}{2}\times\frac{bb}{a^{m+2}}-\frac{m}{1}\times\frac{m+1}{2}\times\frac{m+2}{3}\times\frac{b^3}{a^{m+3}}, \text{ etcétera.}$$

Por medio de esta fórmula podemos transformar todo tipo de estas fracciones en series infinitas, y también sustituir, por *m*, las fracciones o los exponentes fraccionales para así expresar cantidades irracionales.

334. Las siguientes consideraciones ilustrarán esta cuestión aún más. Hemos visto que $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$, etc. Si, por tanto, multiplicamos esta serie por $a+b$, el producto debe ser $=1$, y descubrimos que esto es verdad si realizamos la multiplicación:

$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$, etc.

$a+b$

$1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}-\frac{b^3}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}-\frac{b^5}{a^5}$, etc.

$+\frac{b}{a}-\frac{bb}{aa}+\frac{b^3}{a^3}-\frac{b^4}{a^4}+\frac{b^5}{a^5}$, etc.

1.

335. También hemos encontrado que $\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}$, etc. Si, por tanto, multiplicamos esta serie por $(a+b)^2$, el producto también debe ser $=1$. Ahora bien, $(a+b)^2=aa+2ab+bb$. Veamos, pues, la operación:

$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}+$, etc.

$aa+2ab+bb$

$1-\frac{2b}{a}+\frac{3bb}{aa}-\frac{4b^3}{a^3}+\frac{5b^4}{a^4}-\frac{6b^5}{a^5}+$, etc.

$+\frac{2b}{a}-\frac{4bb}{aa}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{10b^5}{a^5}-$, etc.

$+\frac{bb}{aa}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5}+$, etc.

1= al producto que la naturaleza de esta cuestión requería.

336. Si multiplicamos la serie que encontramos como valor de $\frac{1}{(a+b)^2}$ únicamente por $a+b$ [y no por $(a+b)^2$][3], el producto debe responder a la fracción $\frac{1}{a+b}$ o ser igual a la serie ya encontrada, a saber, $\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$, etc., tal como lo confirma la multiplicación real:

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7}+, \text{ etc.}$$

$$a+b$$

$$\frac{1}{a}-\frac{2b}{aa}+\frac{3bb}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5}-\frac{6b^5}{a^6}+, \text{ etc.}$$

$$+\frac{b}{aa}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5}+, \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{aa}+\frac{bb}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-, \text{ etc., justo como se requería.}$$

[3] Los corchetes son míos. Nota del Traductor.

SECCIÓN III

DE RAZONES Y PROPORCIONES

CAPÍTULO I

DE LA RAZÓN ARITMÉTICA O DE LA DIFERENCIA ENTRE DOS NÚMEROS

337. Dos cantidades son, o bien iguales entre sí, o no lo son. En el último caso, cuando una es mayor que la otra, podemos considerar su desigualdad desde dos puntos de vista: podemos preguntar ¿*por cuánto* una de las cantidades es mayor que la otra?, o bien ¿*cuántas veces* es mayor una que la otra? A los resultados que constituyen las respuestas a ambas preguntas se les llama *relaciones* o *razones*. Normalmente llamamos a la primera *razón aritmética* y a la segunda *razón geométrica*, sin que, a pesar de esto, estas denominaciones tengan conexión alguna con la cosa en sí; han sido, pues, adoptadas de manera arbitraria.

338. Es evidente que las cantidades que estamos considerando deben ser de uno y del mismo tipo, ya que de otra forma no podríamos determinar nada con respecto a su igualdad o desigualdad. Sería absurdo, por ejemplo, preguntarse si dos libras y tres kilos son cantidades iguales. Es por esto que en lo que sigue únicamente consideraremos cantidades del mismo tipo, y como éstas siempre pueden expresarse por números, es sólo con números, como ya dijimos al principio, con lo que trataremos.

339. Por tanto, cuando de dos números dados se requiere encontrar por cuánto es uno mayor que el otro, la respuesta a esta pregunta determina la razón aritmética de los dos números. Ahora bien, como esta respuesta consiste en establecer la diferencia de los dos números, se sigue que una razón aritmética no es otra cosa que la *diferencia* entre dos números. Debido a que esto parece ser una mejor expresión de lo que sucede, reservaremos las palabras *razón* y *relación* para las proporciones geométricas.

340. Encontramos la diferencia entre dos números, como sabemos, al sustraer el menor del mayor. Nada puede ser, pues, más fácil que resolver la cuestión: por cuánto es un número mayor que otro. Es así que, cuando los números son iguales, y siendo nada la diferencia, si se preguntase por cuánto es uno de los números mayor que el otro,

responderíamos que por nada. Por ejemplo, 6 siendo $=2\times 3$, la diferencia entre 6 y 2×3 es 0.

341. Pero cuando los dos números no son iguales, como 5 y 3, y se requiere encontrar por cuánto es 5 mayor que 3, la respuesta es 2, y se obtiene al sustraer 3 de 5. Del mismo modo, 15 es mayor que 5 por 10 y 20 excede a 8 por 12.

342. Tenemos, entonces, que considerar tres cosas en esta cuestión: primero, al mayor de los números; segundo, al menor, y tercero, su diferencia. Estas tres cantidades están conectadas de tal manera que, estando dadas dos de ellas, siempre podemos determinar la tercera.

Sea el número mayor $=a$, el menor $=b$, y la diferencia $=d$. Encontraremos la diferencia *d* al sustraer *b* de *a*, así que $d=a-b$, de donde vemos cómo encontrar *d* cuando *a* y *b* están dados.

343. Pero si están dadas la diferencia *d* y el menor de los dos números, o *b*, podemos determinar al número mayor al añadir juntas la diferencia y el número menor, lo que da $a=b+d$. Esto porque, si de $b+d$ quitamos al número menor *b*, nos queda *d*, que es la diferencia conocida. Sean el número menor $=12$ y la diferencia $=8$; entonces el número mayor será $=20$.

344. Por último, si además de la diferencia *d*, también está dado el número mayor *a*, encontramos al otro número *b* al sustraer la diferencia del número mayor, lo que nos da $b=a-d$. Esto porque, si quitamos el número $a-d$ del número mayor *a*, nos queda *d*, que es la diferencia dada.

345. Por lo tanto, la conexión entre los números *a*, *b*, *d* es de una naturaleza tal que ofrece los siguientes tres resultados: primero, $d=a-b$; segundo, $a=b+d$, y tercero, $b=a-d$. Si una de estas tres comparaciones es justa, las otras deben serlo por necesidad. Por lo cual, en general, si $z=x+y$, necesariamente se sigue que $y=z-x$ y $x=z-y$.

346. Con respecto a estas razones aritméticas debemos observar que, *si a los dos números a y b añadimos un tercer número c asumido a placer, o lo sustraemos de aquellos, la diferencia seguirá siendo la misma*. En otras palabras, si *d* es la diferencia entre *a* y *b*, tal número *d* también será la diferencia entre $a+c$ y $b+c$ y entre $a-c$ y $b-c$. Por ejemplo, siendo 8 la diferencia entre los números 20 y 12, tal diferencia seguirá siendo la misma sin

importar qué número añadamos a 20 y 12, y sin importar qué números sustraigamos de ellos.

347. La prueba de esto es evidente, porque si $a-b=d$, también tendremos que $(a+c)-(b+c)=d$, y que $(a-c)-(b-c)=d$.

348. *Si duplicamos los dos números a y b, la diferencia también se duplicará*. Así, cuando $a-b=d$, tendremos que $2a-2b=2d$ y, *por lo general,* $na-nb=nd$, *sea cual sea el valor que demos a n*.

CAPÍTULO II

DE LA PROPORCIÓN ARITMÉTICA

349. Cuando dos razones, o relaciones, aritméticas son iguales, llamamos a esta igualdad *proporción aritmética*. Así, cuando $a-b=d$ y $p-q=d$, de tal forma que la diferencia entre los números *p* y *q* es la misma que entre los números *a* y *b*, decimos que estos cuatro números forman una proporción aritmética que escribimos de la manera $a-b=p-q$, expresando claramente con esto que la diferencia entre *a* y *b* es igual a la diferencia entre *p* y *q*.

350. Una proporción aritmética consiste, pues, en cuatro términos que deben ser tales que, si sustraemos el segundo del primero, el resto es el mismo que cuando sustraemos el cuarto del tercero. De este modo, los cuatro números 12, 7, 9, 4 forman una proporción aritmética porque $12-7=9-4$.

351. *Si tenemos una proporción aritmética, como* $a-b=p-q$, *podemos hacer que el segundo y el tercer [término] cambien de lugar, escribiendo* $a-p=b-q$, *y esta igualdad no será menos cierta* porque, dado que $a-b=p-q$, si añadimos *b* a ambos lados tenemos $a=b+p-q$, y sustrayendo *p* de ambos lados tenemos $a-p=b-q$. Del mismo modo, así como $12-7=9-4$, también $12-9=7-4$.

352. *En toda proporción aritmética también podemos poner al segundo término en lugar del primero si hacemos la misma transposición con el tercero y el cuarto términos.* En otras palabras, si $a-b=p-q$, también tenemos que $b-a=q-p$. Esto debido a que

$b-a$ es la negativa de $a-b$ y $q-p$ también es la negativa de $p-q$. Así, como $12-7=9-4$, también $7-12=4-9$.

353. *Sin embargo, la gran propiedad de toda proporción aritmética es que la suma del segundo y del tercer término siempre es igual a la suma del primero y del cuarto*. Esta propiedad, que debemos considerar de manera particular, también la expresamos diciendo que la suma de los [términos] *medios* es igual a la suma de los [términos] *extremos*. De este modo, ya que $12-7=9-4$, tenemos que $7+9=12+4$, siendo 16 la suma en ambos casos.

354. Para demostrar esta importante propiedad, sea $a-b=p-q$. Si a ambos lados [de la igualdad] añadimos $b+q$, tenemos $a+q=b+p$, esto es, la suma del primero y del cuarto términos es igual a la suma del segundo y del tercero. *A la inversa, si cuatro números a, b, p, q son tales que la suma del segundo y el tercero es igual a la suma del primero y el cuarto*, es decir, si $b+p=a+q$, concluimos, sin posibilidad de error alguno, que *estos números están en una proporción aritmética*, y que, por lo tanto, $a-b=p-q$. Esto porque, como $a+q=b+p$, si de ambos lados [de la igualdad] sustraemos $b+q$ obtenemos $a-b=p-q$.

De esta manera, los números 18, 13, 15, 10 siendo tales que la suma de los medios $(13+15=28)$ es igual a la suma de los extremos $(18+10=28)$, lo cierto es que también forman una proporción aritmética y que, consecuentemente, $18-13=15-10$.

355. Por medio de esta propiedad es fácil resolver la siguiente cuestión: estando dados los tres primeros términos de una proporción aritmética, encontrar el cuarto. Sean *a*, *b*, *p* los tres primeros términos y expresemos el cuarto por *q*, que es el que se requiere determinar. Entonces, si $a+q=b+p$, sustrayendo *a* de ambos lados obtenemos $q=b+p-a$. Es así que *al cuarto término lo encontramos añadiendo juntos el segundo y el tercer término y sustrayendo al primero de tal suma*. Supongamos, por ejemplo, que 19, 28, 13 son los tres primeros términos dados. La suma del segundo y el tercero es $=41$; quitemos de ella al primer término, que es 19, y nos queda 22 por el cuarto término buscado, de tal suerte que la proporción aritmética estará representada por $19-28=13-22$, o por $28-19=22-13$, o, por último, por $28-22=19-13$.

356. *Si en una proporción aritmética el segundo término es igual al tercero, entonces sólo tenemos tres números*. La propiedad de esto es que el primer término menos el segundo es igual al segundo menos el tercero, o que la diferencia entre el primer y el segundo número es igual a la diferencia entre el segundo y el tercero. Los tres números 19, 15, 11 son de este tipo, porque $19-15=15-11$.

357. *De tres números así se dice que forman una proporción aritmética continua*, que suele escribirse como $19:15:11$. *A tales proporciones también se les llama progresiones aritméticas, particularmente cuando un mayor número de términos se siguen uno al otro de acuerdo con la misma ley*.

Una progresión aritmética puede ser *creciente* o *decreciente*. La primera distinción se aplica cuando los términos van aumentando, esto es, cuando el segundo excede al primero y el tercero excede al segundo por la misma cantidad, como en los números 4, 7, 10. La progresión decreciente es aquella en donde los términos continúan disminuyendo por la misma cantidad, como en los números 9, 5, 1.

358. Supongamos que los números *a*, *b*, *c* están en una progresión aritmética. Entonces $a-b=b-c$, de donde se sigue que, a partir de la igualdad entre la suma de los extremos y la de los medios, $2b=a+c$, y si sustraemos *a* de ambos [lados de la igualdad], tenemos que $c=2b-a$.

359. Es así que *cuando están dados los dos primeros términos a, b de una progresión aritmética, encontramos al tercero quitando el primero del doble del segundo*. Sean 1 y 3 los dos primeros términos de una progresión aritmética. Entonces el tercero será $=2\times3-1=5$. Y estos tres números 1, 3, 5 dan como proporción $1-3=3-5$.

360. Siguiendo el mismo método podemos continuar con la progresión aritmética tanto como nos plazca; *sólo tenemos que encontrar el cuarto término por medio del segundo y del tercero* de la misma manera que determinamos el tercero por medio del primero y del segundo, y así sucesivamente. Sea *a* el primer término y *b* el segundo. Entonces el tercero será $=2b-a$, el cuarto $=4b-2a-b=3b-2a$, el quinto $=6b-4a-2b+a=4b-3a$, el sexto $=8b-6a-3b+2a=5b-4a$, el séptimo $=10b-8a-4b+3a=6b-5a$, etcétera.

CAPÍTULO III

DE LAS PROGRESIONES ARITMÉTICAS

361. Ya hemos comentado que a una serie de números compuesta de cualquier número de términos que siempre aumentan o disminuyen por la misma cantidad se le llama *progresión aritmética*. Así, los números naturales escritos en su orden (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, etc.) forman una progresión aritmética porque aumentan de manera constante en una unidad; y la serie 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1, etc., también es una progresión porque los números decrecen de manera constante en 3.

362. Al número, o cantidad, por el cual los términos de una progresión aritmética se vuelven mayores o menores se le llama *diferencia*. De modo que cuando están dados el primer término y la diferencia, podemos continuar con la progresión aritmética tanto como queramos. Por ejemplo, sea el primer término $=2$ y la diferencia $=3$. Entonces tendremos la siguiente progresión creciente: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, etc., en donde encontramos cada término al añadir la diferencia al término precedente.

363. Es común escribir los números naturales, 1, 2, 3, 4, 5, etc., encima de los términos de una progresión aritmética para que inmediatamente percibamos el rango que tiene cada término en la progresión. A estos números escritos arriba de los términos podemos llamarles *índices*, y el ejemplo anterior se escribe como sigue:

Índices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Progr. Aritm.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29, etc.

Vemos, pues, que 29 es el décimo término.

364. Sea *a* el primer término y *d* la diferencia. Entonces la progresión aritmética ocurrirá en el siguiente orden:

1	2	3	4	5	6	7
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$, etc.

De aquí parece que cualquier término de la progresión puede ser fácilmente encontrado, sin necesidad de encontrar todos los [términos] precedentes, únicamente por medio del primer término *a* y de la diferencia *d*. Por ejemplo, el décimo término será $=a+9d$, el centésimo $=a+99d$ y, por lo general, el término *n* será $=a+(n-1)d$.

365. Cuando nos detenemos en cualquier punto de la progresión, es importante prestar atención al primer y al último términos, ya que el índice del último representará el número de términos. *Si, por lo tanto, el primer término* $= a$ *, la diferencia* $= d$ *, y el número de términos* $= n$*, tendremos que el último término* $= a + (n-1)d$ *, que consecuentemente encontramos al multiplicar la diferencia por el número de términos menos uno, y añadiendo el primer término a tal producto*. Supongamos, por ejemplo, que en una progresión aritmética de cien términos, el primer término $= 4$ y la diferencia $= 3$; entonces el último término será $= 99 \times 3 + 4 = 301$.

366. Si conocemos al primer término *a* y al último *z*, junto con el número de términos *n*, podemos encontrar la diferencia *d*. Esto porque, como el último término $z = a + (n-1)d$, si sustraemos *a* de ambos lados [de la igualdad], obtenemos $z - a = (n-1)d$. Así que, sustrayendo el primer término del último, tenemos el producto de la diferencia multiplicada por el número de términos menos 1. Por lo tanto, sólo debemos dividir $z - a$ entre $n - 1$ para obtener el valor de la diferencia *d* requerido, que es $= \frac{z-a}{n-1}$. Este resultado nos proporciona la siguiente regla: *sustráigase el primer término del último, divídase la resta entre el número de términos menos 1, y el cociente será la diferencia*, por medio de la cual podemos escribir toda la progresión.

367. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una progresión aritmética de nueve términos, cuyo primero $= 2$ y último $= 26$, y que se requiere encontrar la diferencia. Debemos sustraer el primer término, 2, del último, 26, y dividir la resta, que es 24, entre $9 - 1$, esto es, entre 8. El cociente, 3, será igual a la diferencia requerida, y toda la progresión será:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

A modo de otro ejemplo, supongamos que el primer término $= 1$, el último $= 2$, el número de términos $= 10$, y que se requiere la progresión aritmética que responda a estas suposiciones. Para la diferencia, inmediatamente tendremos $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$, y de aquí concluimos que la progresión es:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$1, \quad 1\frac{1}{9}, \quad 1\frac{2}{9}, \quad 1\frac{3}{9}, \quad 1\frac{4}{9}, \quad 1\frac{5}{9}, \quad 1\frac{6}{9}, \quad 1\frac{7}{9}, \quad 1\frac{8}{9}, \quad 2.$

Otro ejemplo. Sea el primer término $=2\frac{1}{3}$, el último $=12\frac{1}{2}$, y el número de términos $=7$. La diferencia es $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36}$, y consecuentemente la progresión es:

1	2	3	4	5	6	7
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

268. Si ahora es el primer término *a*, el último término *z*, y la diferencia *d* lo que está dado, podemos encontrar, a partir de esto, al número de términos *n*. Esto porque, como $z-a=(n-1)d$, al dividir ambos lados [de la igualdad] entre *d* tenemos $\frac{z-a}{d}=n-1$. Ahora, como *n* es mayor que $n-1$ por 1, tenemos que $n=\frac{z-a}{d}+1$. Consecuentemente, *encontramos al número de términos dividiendo la diferencia entre el primer y el último términos, o* $z-a$, *entre la diferencia de la progresión y añadiendo una unidad al cociente* $\frac{z-a}{d}$.

Por ejemplo, sea el primer término $=4$, el último $=100$, y la diferencia $=12$. Entonces el número de términos será $\frac{100-4}{12}+1=9$, y estos nueve términos serán:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Si el primer término $=2$, el último $=6$, y la diferencia es $=1\frac{1}{3}$, el número de términos será $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, y estos cuatro términos serán:

1	2	3	4
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

De nuevo, si el primer término $=3\frac{1}{3}$, el último $=7\frac{2}{3}$, y la diferencia $=1\frac{4}{9}$, el número de términos será $=\dfrac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4$, que son $3\frac{1}{3},4\frac{7}{9},6\frac{2}{9},7\frac{2}{3}$.

369. De todos modos, debemos observar que, debido a que el número de términos es necesariamente un entero, si no hubiésemos obtenido un número de este tipo para *n* en los ejemplos del artículo anterior, las cuestiones habrían sido absurdas. Siempre que no obtengamos un número entero para el valor de $\frac{z-a}{d}$, será imposible resolver esta cuestión, y, consecuentemente, para que las cuestiones de este tipo sean posibles, $z-a$ debe ser divisible entre *d*.

370. De lo que hemos venido diciendo podemos concluir que siempre tenemos cuatro cantidades, o cosas, a considerar en una progresión aritmética:

I. El primer término *a*.

II. El último término *z*.

III. La diferencia *d*.

IV. El número de términos *n*.

Las relaciones entre estas cantidades entre sí son tales que, si conocemos tres de ellas, podremos determinar la cuarta, ya que

I. *Si a, d, y n son conocidas, tenemos* $z=a+(n-1)d$.

II. *Si z, d, y n son conocidas, tenemos* $a=z-(n-1)d$.

III. *Si a, z, y n son conocidas, tenemos* $d=\frac{z-a}{n-1}$.

IV. *Si a, z, y d son conocidas, tenemos* $n=\frac{z-a}{d}+1$.

CAPÍTULO IV

DE LA SUMA DE PROGRESIONES ARITMÉTICAS

371. A menudo es necesario encontrar la suma de una progresión aritmética, y esto puede hacerse al añadir todos los términos juntos. Pero como la adición podría resultar muy tediosa si la progresión consiste en un gran número de términos, se ha ideado una regla por la cual puede obtenerse la suma más fácilmente.

372. Primero consideraremos una progresión particular tal que el primer término $=2$, la diferencia $=3$, el último término $=29$, y el número de términos $=10$:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

En esta progresión vemos que la suma del primer y del último término $=31$; la suma del segundo y del penúltimo $=31$; la suma del tercero y del antepenúltimo $=31$, y así sucesivamente. De aquí concluimos que la suma de cualesquiera dos términos igualmente distantes, el uno del primer término y el otro del último, es siempre igual a la suma del primer y del último términos.

373. La razón de esto puede ser fácilmente rastreada. Si suponemos que el primer término $=a$, el último $=z$, y la diferencia $=d$, la suma del primer y del último término $=a+z$; siendo el segundo término $=a+d$ y el penúltimo $=z-d$, la suma de estos dos términos es también $=a+z$. Más lejos, siendo el tercer término $=a+2d$ y el antepenúltimo $=z-2d$, es evidente que también estos dos términos añadidos juntos dan $a+z$. La demostración puede ser fácilmente extendida al resto de los términos.

374. Para determinar, entonces, la suma de la progresión propuesta, escribamos la misma progresión invertida término por término y añadamos juntos los correspondientes términos, como sigue:

$$2+5+8+11+14+17+20+23+26+29$$
$$29+26+23+20+17+14+11+8+5+2$$
$$31+31+31+31+31+31+31+31+31+31$$

Esta serie de términos iguales es evidentemente igual al doble de la suma de la progresión dada. Ahora, el número de estos términos iguales es 10, como en la progresión dada o

propuesta, y su suma, consecuentemente, $=10\times 31=310$. Así que, como esta suma es el doble de la suma de la progresión aritmética [propuesta], la suma requerida debe ser $=155$.

375. Si procedemos de la misma forma con respecto a cualquier progresión aritmética cuyo primer término sea $=a$, el último $=z$, y el número de términos $=n$, y escribiendo, bajo la progresión dada, la misma progresión invertida, y añadiendo término con término, tendremos una serie de *n* términos cada uno de los cuales será $=a+z$. La suma de esta serie consecuentemente será $=n(a+z)$, y será el doble de la suma de la progresión aritmética propuesta, que por lo tanto será $=\frac{n(a+z)}{2}$.

376. Este resultado nos proporciona un método sencillo para encontrar la suma de cualquier progresión aritmética, y puede reducirse a la siguiente regla: *multiplíquese la suma del primer y del último término por el número de términos, y la mitad de tal producto será la suma de toda la progresión*. O, lo que viene a ser lo mismo, multiplíquese la suma del primer y del último término por la mitad del número de términos. O, multiplíquese la mitad de la suma del primer y del último término por todo el número de términos. Ambos de estos enunciados de la regla darán la suma de la progresión.

377. Puede resultar adecuado ilustrar esta regla con algunos ejemplos. Primero, requiérase encontrar la suma de la progresión de los números naturales, 1, 2, 3, etc., hasta 100. Esta suma será, por la primera regla, $=\frac{100\times 101}{2}=50\times 101=5050$.

Si se requiriese decir cuántas campanadas da un reloj en doce horas, debemos añadir los números 1, 2, 3, hasta 12. Ahora encontramos de manera inmediata que esta suma $=\frac{12\times 13}{2}=6\times 13=78$. Si quisiésemos conocer la suma de la misma progresión continuada hasta 1000, descubriríamos que es 500500, y continuada hasta 10000 será 50005000.

378. Otra cuestión del mismo tipo. Una persona compra una caballería[4] bajo la condición de que, para la primera pezuña del primer caballo, pague 5 medios peniques, para la segunda, 8, para la tercera, 11, y así sucesivamente, siempre aumentando 3 medios peniques para cada pezuña nueva de cada caballo. Habiendo 32 pezuñas en total, se requiere saber cuánto pagará el comprador.

[4] Asumiremos, pues, que la caballería comprada consta de 8 caballos. Nota del Traductor.

En esta cuestión, requerimos encontrar la suma de una progresión aritmética cuyo primer término es 5, la diferencia es 3, y el número de términos es 32. Debemos, por tanto, comenzar por determinar el último término, que es (por la regla en los artículos 365 y 370) $=5+31\times 3=98$. Después de esto encontramos fácilmente que la suma requerida es $=\frac{103\times 32}{2}=103\times 16$, de donde concluimos que la caballería cuesta 1648 medios peniques.

379. Por lo general, sea el primer término $=a$, la diferencia $=d$, y el número de términos $=n$, y requiérase encontrar, por medio de estos datos, la suma de toda la progresión. Como el último término debe ser $=a+(n-1)d$, la suma del primer y del último término será $=2a+(n-1)d$. Multiplicando esta suma por el número de términos *n*, tenemos $2na+n(n-1)d$, y la suma requerida será, entonces, $=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Si aplicamos esta fórmula al ejemplo anterior, o a $a=5$, $d=3$, y $n=32$, tenemos $5\times 32+\frac{32\times 31\times 3}{2}=160+1488=1648$, la misma suma que obtuvimos antes.

380. Si requiriésemos añadir juntos todos los números naturales desde 1 hasta *n*, para encontrar esta suma tendríamos que el primer término es $=1$, el último término es $=n$, y el número de términos es $=n$, de donde se sigue que la suma requerida es $=\frac{nn+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. Si hacemos que $n=1766$, la suma de todos los números desde 1 hasta 1766 será $=883\times 1767=1560261$.

381. Propongamos la progresión de números impares 1, 3, 5, 7, etc., continuada hasta *n* términos y requiramos su suma. Aquí, el primer término es $=1$, la diferencia $=2$, y el número de términos $=n$. El último término será, por lo tanto, $=1+(n-1)2=2n-1$; consecuentemente, la suma requerida es $=nn$.

Todo consiste, pues, en multiplicar el número de términos por sí mismo, de tal forma que *sin importar el número de términos de esta progresión que añadamos juntos, la suma siempre será un cuadrado, a saber, el cuadrado del número de términos*. Esto lo podemos ejemplificar como sigue:

Índices	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 etc.
Progresión	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19, etc.

Suma 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, etc.

382. Sea el primer término $=1$, la diferencia $=3$, y el número de términos $=n$. Entonces tendremos la progresión 1, 4, 7, 10, etc., cuyo último término será $1+(n-1)3=3n-2$, de donde se sigue que la suma del primer y del último término es $=3n-1$ y, consecuentemente, la suma de esta progresión es $=\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$. Si suponemos que $n=20$, la suma será $=10\times 59=590$.

383. De nuevo, sea el primer término $=1$, la diferencia $=d$, y el número de términos $=n$. Entonces el último término será $=1+(n-1)d$. Añadiendo el primer [término], tenemos $2+(n-1)d$, y multiplicando esto por el número de términos tenemos $2n+n(n-1)d$, de donde deducimos que la suma de la progresión es $=n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

En este tenor, obtenemos la siguiente tabla si *d* es sucesivamente igual a 1, 2, 3, 4, etcétera.

Si $d=1$, la suma es $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$, $\quad n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$, $\quad n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$, $\quad n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$, $\quad n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$

$d=6$, $\quad n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$, $\quad n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$, $\quad n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$

$d=9$, $\quad n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$

$d = 10$, $\qquad n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn - 4n$

CAPÍTULO V

DE LA RAZÓN GEOMÉTRICA

384. La razón geométrica de dos números se encuentra al resolver la cuestión de *cuántas veces* es uno de tales números mayor que el otro. Esto se hace dividiendo uno [de los números] entre el otro, y el cociente expresará la razón requerida.

385. Así es que aquí habemos de considerar tres cosas: primera, al primero de los dos números dados, que llamaremos *antecedente*; segunda, al otro número, que llamaremos *consecuente*, y tercera, a la razón de los dos números o al cociente que resulta de la división del antecedente entre el consecuente. Por ejemplo, si se requiriese la relación de los números 18 y 12, 18 es el antecedente, 12 el consecuente, y $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ la razón, de donde vemos que el antecedente contiene al consecuente una y media veces.

386. Es una práctica común representar la relación geométrica por dos puntos, puestos uno encima del otro, colocados entre el antecedente y el consecuente. Así, $a:b$ significa la relación geométrica entre estos dos números, o la razón de *b* a *a*. Ya vimos que este signo se emplea para representar la división, y es precisamente por esta razón por la que hacemos uso de él aquí. Esto porque, para conocer esta razón, debemos dividir *a* entre *b*. La relación expresada por este signo se lee simplemente como *a* es a *b*.

387. Expresamos, entonces, la relación por una fracción cuyo numerador es el antecedente y cuyo denominador es el consecuente. En aras de la claridad, se requiere que esta fracción se reduzca siempre a sus términos mínimos, lo que conseguimos, como ya hemos visto, al dividir tanto al numerador como al denominador entre su máximo común divisor. De esta manera, la fracción $\frac{18}{12}$ se convierte en $\frac{3}{2}$ si dividimos ambos de sus términos entre 6.

388. Así es que las relaciones sólo difieren en la medida en que sus razones sean distintas, y habrá tantos tipos de relaciones geométricas como podamos concebir razones distintas. El primer tipo es, sin duda, aquel en donde la razón se vuelve una unidad. Este

caso tiene lugar cuando los dos números son iguales, como en $3:3$; $4:4$; $a:a$, etc. Aquí la razón es 1, y es por esto que la llamamos una relación de igualdad.

Después siguen aquellas relaciones en donde la razón es otro número entero, como en $4:2$, donde la razón es 2 y se le llama razón *doble*; en $12:4$ la razón es 3 y se le llama razón *triple*; en $24:6$ la razón es 4 y se le llama razón *cuádruple*, etc.

Después de éstas siguen aquellas relaciones cuyas razones son expresadas por fracciones, como $12:9$, donde la razón es $\frac{4}{3}$ o $1\frac{1}{3}$; $18:27$, donde la razón es $\frac{2}{3}$, etc. También podemos distinguir aquellas relaciones en donde el consecuente contiene exactamente dos, tres, cuatro, etc., veces al antecedente, como en $6:12$, $5:15$, $4:16$, etc., a cuyas razones algunos les llaman *subduplo*, etcétera.

Además, llamamos *racional* a la razón que es un número expresable, como $11:7$, $8:15$, etc., donde el antecedente y el consecuente son números enteros, e *irracional* a la razón que no puede ser expresada exactamente ni por enteros ni por fracciones, como $\sqrt{5}:8$, $4:\sqrt{3}$, etc.

389. Sea *a* el antecedente, *b* el consecuente, y *d* la razón. Ya sabemos que si *a* y *b* están dados, $d=\frac{a}{b}$. Si estuviesen dados el consecuente *b* junto con la razón *d*, encontraríamos que el antecedente es $a=bd$, porque *bd* dividido entre *b* da *d*. Por último, cuando están dados el antecedente *a* y la razón *d*, encontramos que el consecuente es $b=\frac{a}{d}$ porque, al dividir el antecedente *a* entre el consecuente $\frac{a}{d}$, obtenemos el cociente *d*, esto es, la razón.

390. Toda relación $a:b$ sigue siendo la misma aunque multipliquemos o dividamos al antecedente y al consecuente por el mismo número, porque la razón es la misma. Sea *d* la razón de $a:b$; entonces $d=\frac{a}{b}$. Ahora bien, la razón de la relación $na:nb$ también es $\frac{a}{b}=d$, y la de la relación $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ es igualmente $\frac{a}{b}=d$.

391. Una vez reducida una razón a sus términos mínimos, es fácil percibir y enunciar la relación. Por ejemplo, cuando la razón $\frac{a}{b}$ ha sido reducida a la fracción $\frac{p}{q}$, decimos que $a:b=p:q$ o que $a:b::p:q$, lo que se lee como *a* es a *b* como *p* es a *q*. Así, siendo $\frac{2}{1}$, o 2, la razón de la relación $6:3$, decimos que $6:3=2:1$. Del mismo modo tenemos que $18:12=3:2$, que $24:18=4:3$, que $30:45=2:3$, etc. Pero si la razón no puede ser reducida, la relación no se hará más evidente; no simplificamos la relación diciendo que $9:7=9:7$.

392. Por otro lado, a veces es posible transformar la relación de dos números muy grandes en una que sea más simple y evidente al reducir ambos de sus términos a sus términos mínimos. Por ejemplo, podemos decir que $28844:14422=2:1$, o que $10566:7044=3:2$, o que $57600:25200=16:7$.

393. Por lo tanto, para expresar cualquier relación de la manera más clara posible, es necesario reducirla a los números más pequeños posibles. Esto se consigue fácilmente al dividir los dos términos de la relación entre su máximo común divisor. Por ejemplo, para reducir la relación $57600:25200$ a la de $16:7$, únicamente tenemos que llevar a cabo la operación de dividir los números 576 y 252 entre 36, que es su máximo común divisor.

394. Es importante, pues, saber cómo encontrar al máximo común divisor de dos números dados, pero esto requiere una regla que expondremos en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO VI

DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR DE DOS NÚMEROS DADOS

395. Existen algunos números que no tienen otro divisor común excepto la unidad, y cuando el numerador y el denominador de una fracción son de esta naturaleza, no podemos reducirla a una forma más conveniente. Los dos números 48 y 35, por ejemplo, no tienen divisor común alguno, aunque cada uno tiene sus propios divisores. Por esta razón no podemos expresar la relación $48:35$ de manera más simple, porque la división de dos números entre 1 no los disminuye.

396. Pero si los dos números tienen un divisor común, éste se encuentra a partir de la siguiente regla: *divídase al mayor de los dos números entre el menor; después, divídase al divisor precedente entre el residuo, y lo que queda en esta segunda división se volverá después un divisor para una tercera división en donde el residuo del divisor precedente será el dividendo. Debemos seguir con esta operación hasta que lleguemos a una división que no deje ningún residuo; el divisor de esta división, y consecuentemente el último divisor, será el máximo común divisor de los dos números dados*.

Veamos esta operación para los dos números 576 y 252.

```
252)576(2
    504
     72)252(3
        216
         36)72(2
            72
             0.
```

Así que, en este caso, el máximo común divisor es 36.

397. Será conveniente ilustrar esta regla con algunos otros ejemplos. Requiérase el máximo común divisor de los números 504 y 312.

```
312)504(1
    312
    192)312(1
        192
        120)192(1
            120
             72)120(1
                72
                48)72(1
                   48
                   24)48(2
                      48
                       0.
```

Así que 24 es el máximo común divisor y, consecuentemente, la relación $504:312$ se reduce a la forma $21:13$.

398. Supongamos como dada la relación $625:529$ y requiérase el máximo común divisor de estos dos números.

```
529)625(1
    529
     96)529(5
        480
          49)96(1
             49
              47)49(1
                 47
                  2)47(23
                    46
                     1)2(2
                       2
                       0.
```

Por lo tanto, 1 es, en este caso, el máximo común divisor, y en consecuencia no podemos expresar la relación $625:529$ por números menores ni reducirla a menos términos.

399. En este momento resulta apropiado ofrecer una demostración de esta regla. Para esto, sea *a* el mayor y *b* el menor de los números dados, y *d* uno de sus divisores comunes. Es evidente que, *a* y *b* siendo divisibles entre *d*, también podemos dividir las cantidades $a-b, a-2b, a-3b$ y, en general, $a-nb$, entre *d*.

400. Lo contrario no es menos cierto, esto es, si los números *b* y $a-nb$ son divisibles entre *d*, el número *a* también lo será. Esto porque, siendo *nb* divisible entre *d*, no podríamos dividir $a-nb$ entre *d* si *a* no fuese también divisible entre *d*.

401. Observamos, además, que si *d* es el máximo común divisor de dos números *b* y $a-nb$, también será el máximo común divisor de los dos números *a* y *b*. Esto porque, si se encontrase otro máximo común divisor que no fuese *d* para estos números *a* y *b*, tal número también sería un divisor común de *b* y de $a-nb$ y, en consecuencia, *d* no sería el máximo común divisor de estos dos números. Pero hemos supuesto que *d* es el máximo común

divisor de b y $a - nb$, de donde se sigue que d también debe ser el máximo común divisor de a y b.

402. Una vez establecidas estas tres cosas, dividamos, de acuerdo con nuestra regla, al mayor número a entre el menor b, y supongamos que el cociente es $= n$. El resto será $a - nb$, que debe ser menor que b. Ahora, este resto $a - nb$, teniendo el mismo máximo común divisor que b, como los números dados a y b, sólo tenemos que repetir la división, dividiendo al divisor precedente b entre el resto $a - nb$, y este nuevo resto obtenido tendrá el mismo máximo común divisor que el divisor precedente, y así sucesivamente.

403. Procedemos del mismo modo hasta que lleguemos a una división sin resto, esto es, a una en donde el resto sea nada. Sea p el último divisor, contenido exactamente un cierto número de veces en su dividendo; éste será, por tanto, divisible entre p, y tendrá la forma mp, de tal forma que los números p y mp son ambos divisibles entre p. Lo cierto es que no tendrán máximo común divisor alguno, porque ningún número puede ser dividido entre un número mayor que sí mismo. En consecuencia, este último divisor es también el máximo común divisor de los números dados a y b, y es así como demostramos la regla establecida.

404. Podemos ofrecer otro ejemplo más de esta regla al requerir el máximo común divisor de los números 1728 y 2304. La operación es como sigue:

```
1728)2304(1
     1728
      576(1728(3
            1728
              0.
```

De esto se sigue que 576 es el máximo común divisor, y que la relación $1728:2304$ se reduce a $3:4$, es decir, 1728 es a 2304 lo mismo que 3 es a 4.

CAPÍTULO VII

DE LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

405. Dos relaciones geométricas son iguales cuando sus razones son iguales. A esta igualdad de dos relaciones se le llama *proporción geométrica*, y escribimos, por ejemplo,

$a:b=c:d$ o $a:b::c:d$ para indicar que la relación $a:b$ es igual a la relación $c:d$; pero esto se expresa de manera más simple diciendo que *a* es a *b* como *c* es a *d*. La siguiente es una proporción de este tipo: $8:4=12:6$, porque la razón de la relación $8:4$ es $\frac{2}{1}$, y ésta también es la razón de la relación $12:6$.

406. Así que $a:b=c:d$ siendo una proporción geométrica, la razón debe ser la misma en ambos lados, y $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; recíprocamente, si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, tenemos que $a:b::c:d$.

407. Una proporción geométrica consiste, por tanto, en cuatro términos tales que el primero dividido entre el segundo da el mismo cociente que el tercero dividido entre el cuarto. De aquí deducimos una importante propiedad común a toda proporción geométrica, a saber, que *el producto del primero y del último término siempre es igual al producto del segundo y del tercero* o, más simple, que *el producto de los [términos] extremos es igual al producto de los [términos] medios*.

408. Para demostrar esta propiedad, tomemos la proporción geométrica $a:b=c:d$ de modo que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Si multiplicamos estas dos fracciones por *b*, obtenemos $a=\frac{bc}{d}$, y multiplicando además ambos lados por *d*, tenemos $ad=bc$. Ahora, *ad* es el producto de los términos extremos, y *bc* el de los medios, y estos dos productos resultan ser iguales.

409. *Recíprocamente, si los cuatro términos a, b, c, d son tales que el producto de los dos extremos a y d es igual al producto de los dos medios b y c, estamos seguros de que forman una proporción geométrica*. Esto porque, como $ad=bc$, sólo tenemos que dividir ambos lados entre *bd*, lo que nos da $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y consecuentemente $a:b=c:d$.

410. *Los cuatro términos de una proporción geométrica*, como $a:b=c:d$, *pueden ser transpuestos de distintas maneras sin destruir la proporción, porque la regla siempre siendo que el producto de los extremos es igual al producto de los medios o que* $ad=bc$, *podemos decir que:* primero, $b:a=d:c$; segundo, $a:c=b:d$; tercero, $d:b=c:a$; cuarto, $d:c=b:a$.

411. Además de estas cuatro proporciones geométricas, podemos deducir unas cuantas más de la misma proporción $a:b=c:d$. *Podemos decir que el primer término*

más el segundo es al primero como el tercero más el cuarto es al tercero, esto es, que $a+b:a=c+d:c$.

También podemos decir que *el primero menos el segundo es al primero como el tercero menos el cuarto es al tercero*, o que $a-b:a=c-d:c$. Porque, si tomamos el producto de los extremos y los medios, tenemos $ac-bc=ac-ad$, que evidentemente lleva a la igualdad $ad=bc$.

Por último, es fácil demostrar que $a+b:b=c+d:d$ y que $a-b:b=c-d:d$.

412. Todas las proporciones que hemos deducido de $a:b=c:d$ pueden representarse, en general, como sigue: $ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd$. Esto porque el producto de los términos extremos es $mpac+npbc+mqad+nqbd$ que, ya que $ad=bc$, se vuelve $mpac+npbc+mqbc+nqbd$. Además, el producto de los términos medios es $mpac+mqbc+npad+nqbd$ o, ya que $ad=bc$, es $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, así que los dos productos son iguales.

413. Es evidente, entonces, que estando dada una proporción geométrica, por ejemplo $6:3=10:5$, pueden deducirse de ella infinitas otras. Sólo ofreceremos unas cuantas:

$$3:6=5:10;6:10=3:5;9:6=15:10;3:3=5:5;9:15=3:5;9:3=15:5.$$

414. Ya que en toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios, podemos encontrar, cuando son conocidos los tres primeros términos, al cuarto a partir de ellos. Sean los tres primeros términos $24:15=40:$al cuarto término. Como aquí el producto de los medios es 600, el cuarto término multiplicado por el primero, esto es, por 24, también debe dar 600. Consecuentemente, al dividir 600 entre 24, el cociente 25 será el cuarto término requerido, y la proporción completa será $24:15=40:25$. En general, por tanto, si los tres primeros términos son $a:b=c:...$, ponemos *d* para la cuarta letra desconocida, y como $ad=bc$, dividimos ambos lados entre *a* y tenemos $d=\frac{bc}{a}$. Así que *el cuarto término* es $=\frac{bc}{a}$, y *se encuentra al multiplicar el segundo término por el tercero y dividiendo tal producto entre el primer término*.

415. Este es el fundamento de la célebre *regla de tres* en la aritmética; pero ¿qué se requiere en esa regla? Suponemos tres números dados y buscamos un cuarto que puede

estar en proporción geométrica, así que el primero puede ser al segundo como el tercero es al cuarto.

416. En este punto requieren nuestra atención algunas circunstancias particulares. Primero, *si en dos proporciones los términos primero y tercero son los mismos*, como en $a:b=c:d$ y $a:f=c:g$, yo digo que *los dos segundos términos y los dos cuartos términos también estarán en una proporción geométrica*, y que $b:d=f:g$. Porque, la primera proporción siendo transformada en esto: $a:c=b:d$, y la segunda en esto: $a:c=f:g$, se sigue que las relaciones $b:d$ y $f:g$ son iguales, ya que cada una de ellas es igual a la relación $a:c$. Por ejemplo, si $5:100=2:40$ y $5:15=2:6$, debemos tener que $100:40=15:6$.

417. Pero si las dos proporciones son tales que los términos medios son los mismos en ambas, yo digo que los primeros términos estarán en una proporción inversa con los términos cuartos. Esto es, si $a:b=c:d$ y $f:b=c:g$, se sigue que $a:f=g:d$. Sean las proporciones, por ejemplo, $24:8=9:3$ y $6:8=9:12$; entonces tenemos que $24:6=12:3$. La razón de esto es evidente: la primera proporción da $ad=bc$; la segunda $fg=bc$, y por lo tanto $ad=fg$ y $a:f=g:d$ o $a:g::f:d$.

418. Estando dadas dos proporciones, siempre podemos producir una nueva al multiplicar, por separado, el primer término de la primera por el primer término de la segunda, el segundo [término de la primera] por el segundo [término de la segunda], y así sucesivamente con respecto a los demás términos. Así, las proporciones $a:b=c:d$ y $e:f=g:h$ producirán esto: $ae:bf=cg:dh$. Esto porque, la primera [proporción] dando $ad=bc$ y la segunda dando $eh=fg$, tenemos también que $adeh=bcfg$. Ahora, *adeh* es el producto de los extremos y *bcfg* es el producto de los medios en la nueva proporción, y siendo iguales los dos productos, la proporción es verdadera.

419. Sean las dos proporciones, por ejemplo, $6:4=15:10$ y $9:12=15:20$; su combinación dará la proporción $6\times9:4\times12=15\times15:10\times20$ o $54:48=225:200$ o $9:8=9:8$.

420. Por último, debemos observar que, si dos productos son iguales, como en $ad=bc$, recíprocamente podemos convertir esta igualdad en una proporción geométrica, porque siempre tendremos uno de los factores del primer producto en la misma proporción

con uno de los factores del segundo producto como el otro factor del segundo producto es al otro factor del primer producto; esto es, en nuestro caso, $a:c=b:d$ o $a:b=c:d$. Sea $3\times 8=4\times 6$; de esto podemos formar esta proporción: $8:4=6:3$, o esta: $3:4=6:8$. Del mismo modo, si $3\times 5=1\times 15$, tendremos $3:15=1:5$ o $5:1=15:3$ o $3:1=15:5$.

CAPÍTULO VIII

OBSERVACIONES SOBRE LAS REGLAS DE PROPORCIÓN Y SU UTILIDAD

421. Esta teoría es tan útil que, en los sucesos de la vida cotidiana, casi ninguna persona puede dejarla de lado. Siempre hay una proporción entre precios y bienes, y cuando se intercambian distintos tipos de moneda, todo consiste en determinar sus relaciones mutuas. Los ejemplos ofrecidos por estas reflexiones serán muy apropiados para ilustrar los principios de la proporción y para mostrar su utilidad a partir de su aplicación.

422. Si quisiésemos conocer, por ejemplo, la relación entre dos tipos de moneda, supongamos entre un viejo Luis de oro y un ducado, primero debemos conocer el valor de tales piezas cuando son comparadas con otras del mismo tipo. Así, un viejo Luis de oro valiendo en Berlín 5 dólares rix[5] y 3 dracmas,[6] y un ducado valiendo 3 dólares rix, podemos reducir estos dos valores a una denominación: o bien a dólares rix, lo que da la proporción $1L:1D=5\frac{1}{3}R:3R$ o $=16:9$, o bien a dracmas, en cuyo caso tenemos $1L:1D=128:72=16:9$. Estas proporciones evidentemente dan la verdadera relación del viejo Luis de oro con el ducado, porque la igualdad de los productos de los [términos] extremos y medios da, en ambas, 9 Luises = 16 ducados, y por medio de esta comparación podemos cambiar cualquier suma de viejos Luises en ducados y viceversa. Supongamos que se requiriese decir cuántos ducados hay en 1000 viejos Luises. Entonces tenemos esta regla de tres: si 9 Luises son iguales a 16 ducados, ¿a qué son iguales 1000 Luises? La respuesta será: a $1777\frac{7}{9}$ ducados.

---

[5] El dólar rix de Alemania vale 92 centavos 6 milésimos, y una dracma es $1/24$ parte de un dólar rix.

[6] En buena parte de lo que sigue, Euler ofrece ejemplos con monedas que ya no están en curso. Por razones de lealtad al texto original, he decidido no modificar esta práctica. Nota del Traductor.

Si, por el contrario, se requiriese encontrar cuántos Luises de oro hay en 1000 ducados, tenemos la siguiente proporción. Si 16 ducados son iguales a 9 Luises, ¿a qué son iguales 1000 ducados? La respuesta es: a $562\frac{1}{2}$ viejos Luises de oro.

423. Aquí (en Petersburgo) el valor del ducado varía, y depende del curso del intercambio. Este curso determina el valor del rublo en stivers, o medio penique holandés, 105 de los cuales hacen un ducado.

Así que cuando el intercambio está en 45 stivers, tenemos esta proporción: 1 rublo : 1 ducado $= 45:105 = 3:7$, y por tanto esta igualdad: 7 rublos = 3 ducados.

A partir de esto encontraremos el valor de un ducado en rublos, porque 3 ducados : 7 rublos = 1 ducado :…; la respuesta es $2\frac{1}{3}$ rublos.

Si el intercambio estuviese en 50 stivers, tendríamos esta proporción: 1 rublo : 1 ducado $= 50:105 = 10:21$, lo que daría 21 rublos = 10 ducados, y tendríamos que 1 ducado $= 2\frac{1}{10}$ rublos. Por último, cuando el intercambio está en 44 stivers, tenemos que 1 rublo : 1 ducado $= 44:105$, y consecuentemente 1 ducado $= 2\frac{17}{44}$ rublos $= 2$ rublos $38\frac{7}{11}$ cópecs.[7]

424. De esto se sigue que también podemos comparar distintos tipos de moneda que con frecuencia tenemos ocasión de hacer en letras de cambio. Supongamos, por ejemplo, que una persona de este lugar [Petersburgo] tiene 1000 rublos que le serán pagados en Berlín, y que quiere saber el valor de esta suma en ducados en Berlín.

El intercambio aquí es $47\frac{1}{2}$, esto es, un rublo son $47\frac{1}{2}$ stivers. En Holanda, 20 stivers son un florín; $2\frac{1}{2}$ florines holandeses son un dólar holandés. Además, el intercambio de Holanda con Berlín está en 142, esto es, por cada 100 dólares holandeses se pagan 142 dólares en Berlín. Por último, el ducado vale 3 dólares en Berlín.

425. Para resolver las cuestiones propuestas, procedamos paso a paso. Comenzando, pues, con los stivers, ya que 1 rublo $= 47\frac{1}{2}$ stivers, o 2 rublos $= 95$ stivers, tendremos que 2

[7] Un cópec es la décima parte de un rublo, como fácilmente se deduce de lo escrito arriba.

rublos : 95 stivers = 1000 : …*respuesta*: 47500 stivers. Si vamos más allá y decimos 20 stivers : 1 florín = 47500 stivers, tendremos 2375 florines. Además, $2\frac{1}{2}$ florines = 1 dólar holandés, o 5 florines = 2 dólares holandeses; por tanto tendremos que 5 florines : 2 dólares holandeses = 2375 florines : …*respuesta*: 950 dólares holandeses.

Entonces, tomando los dólares de Berlín de acuerdo con el intercambio en 142, tendremos que 100 dólares holandeses : 142 dólares = 950 : …es al cuarto término, 1349 dólares de Berlín. Pasemos, por último, a los ducados, y digamos que 3 dólares : 1 ducado = 1349 dólares : …*respuesta*: $449\frac{2}{3}$ ducados.

426. Para completar todavía más estos cálculos, supongamos que el banquero de Berlín se rehúsa, bajo algún pretexto u otra cosa, a pagar esta suma, y a exceptuar la letra de cambio sin el descuento de cinco por ciento, esto es, pagando sólo 100 en lugar de 105. En ese caso, debemos hacer uso de la siguiente proporción: $105:100 = 449\frac{2}{3}$: … es a un cuarto término que es $428\frac{16}{63}$ ducados.

427. Hemos mostrado que son necesarias seis operaciones al hacer uso de la regla de tres, pero podemos abreviar considerablemente tales cálculos por una regla llamada *regla de reducción*. Para explicar esta regla, primero debemos considerar los dos antecedentes de cada una de las seis operaciones precedentes:

I. 2 rublos	: 95 stivers.
II. 20 stivers	: 1 florín holandés.
III. 5 florines h.	: 2 dólares holandeses.
IV. 100 dólares h.	: 142 dólares.
V. 3 dólares	: 1 ducado.
VI. 105 ducados	: 100 ducados.

Si ahora vemos los cálculos anteriores, observaremos que siempre hemos multiplicado la suma dada por los segundos términos, y que hemos dividido los productos entre el primero; es evidente, entonces, que llegaremos a los mismos resultados si multiplicamos, de una vez, la suma propuesta por el producto de todos los segundos términos y dividimos entre todos los primeros términos. O, lo que viene a ser lo mismo,

sólo tenemos que hacer la siguiente proporción: así como el producto de todos los primeros términos es al producto de todos los segundos términos, también es el número dado de rublos al número de ducados pagaderos en Berlín.

428. Este cálculo puede abreviarse todavía más cuando, entre los primeros términos, se encuentran algunos que tienen divisores comunes con algunos de los segundos términos, porque en este caso destruimos tales términos y sustituimos al cociente que surge de la división por tal divisor común [o común divisor, si se quiere]. De esta manera, el ejemplo anterior asumirá la siguiente forma:

Como $(2.20.5.100.3.105):1000::(95.2.142.100):\frac{1000.95.2.142.100}{2.20.5.100.3.105}$, después de cancelar los divisores comunes en el numerador y en el denominador esto se vuelve $\frac{10.19.142}{3.21}=\frac{26980}{63}=428\frac{16}{63}$ ducados, tal como antes.

429. El método a observar al utilizar la regla de reducción es el siguiente: comenzamos con el tipo de moneda en cuestión y lo comparamos con otro que ha de comenzar la siguiente relación, en donde comparamos este segundo tipo con un tercero, y así sucesivamente. Cada relación, por tanto, comienza con el mismo tipo que con el que terminó la relación precedente. Esta operación continúa hasta que llegamos al tipo de moneda que requiere la respuesta y, al final, consideramos los restos fraccionarios.

430. Propondremos otros ejemplos para facilitar la práctica de este cálculo.

Si los ducados ganan en Hamburgo 1 por ciento sobre dos dólares, es decir, si 50 ducados valen, no 100, sino 101 dólares, y si el intercambio entre Hamburgo y Königsberg es 119 dracmas de Polonia, esto es, si 1 dólar da 119 dracmas polacos, ¿cuántos florines polacos darán 1000 ducados?

Dando por entendido que 30 dracmas polacos hacen 1 florín polaco,

1 : 1000 :: 2 dólares

100 — 101 dólares

1 — 119 dracmas polacos

30 — 1 florín polaco;

por lo tanto,

$$(100.30):1000::(2.101.119):\frac{1000.2.101.119}{100.30}=\frac{2.101.119}{3}=8012\frac{2}{3}$$ florines polacos (*respuesta*).

431. Propondremos otro ejemplo para ilustrar todavía más este método.

Ducados de Ámsterdam son llevados a Leipzig, teniendo en la primera ciudad el valor de 5 florines 4 stivers de curso legal, esto es, un ducado vale 104 stivers y 5 ducados valen 26 florines holandeses. Si, por tanto, el *agio del banco*[8] en Ámsterdam es 5 por ciento, es decir, si 105 moneda corriente es igual a 100 moneda banco, y si el intercambio de Leipzig a Ámsterdam, en dinero de banco, es $133\frac{1}{4}$ por ciento, esto es, si por 100 dólares pagamos en Leipzig $133\frac{1}{4}$ dólares, y por último, 2 dólares holandeses son 5 florines holandeses, se requiere determinar cuántos dólares debemos pagar en Leipzig, de acuerdo con estos intercambios, por 1000 ducados.

Por la regla,

5 : 1000 :: 26 florines h. (corriente)

105 — 100 florines h. (banco)

400 — 533 dólares de Leipzig

5 — 2 dólares (banco)

por lo tanto,

Como

$$(5.105.400.5):1000::(26.100.533.2):\frac{1000.26.100.533.2}{5.105.400.5}=\frac{4.26.533}{21}=2639\frac{13}{21}$$ dólares o 2639 dólares y 15 dracmas.

CAPÍTULO IX

DE RELACIONES COMPUESTAS

432. Las relaciones compuestas se obtienen al multiplicar los términos de dos o más relaciones, los antecedentes por los antecedentes y los consecuentes por los consecuentes;

[8] La diferencia de valor entre dinero de banco y dinero corriente.

entonces decimos que la relación entre tales dos productos está *compuesta* de las relaciones dadas.

Así, las relaciones $a:b, c:d, e:f$ dan la relación compuesta $ace:bdf$.[9]

433. Una relación sigue siendo la misma cuando dividimos ambos de sus términos entre el mismo número para abreviarla; podemos facilitar enormemente la composición anterior al comparar los antecedentes y los consecuentes con el propósito de hacer tales reducciones como lo hicimos en el último capítulo.

Por ejemplo, encontramos la relación compuesta de las siguientes relaciones dadas así:

Relaciones dadas

12 : 25, 28: 33, y 55 : 56.

Lo que se vuelve

(12.28.55) : (25.33.56) = 2 : 5

al cancelar los divisores comunes.

Así que 2 : 5 es la relación compuesta requerida.

434. La misma operación ha de ser realizada cuando requerimos calcular con letras, y el caso más notable es en el que cada antecedente es igual al consecuente de la relación precedente. Si las relaciones dadas son

$$a:b$$
$$b:c$$
$$c:d$$
$$d:e$$
$$e:a,$$

la relación compuesta es 1 : 1.

435. La utilidad de estos principios será percibida cuando observemos que la relación entre dos campos cuadrados está compuesta de las relaciones de las longitudes y las anchuras.

[9] Se dice que cada una de estas razones [proporciones] es una de las *raíces* de la razón [proporción] compuesta.

Sean los dos campos, por ejemplo, *A* y *B*; tenga *A* 500 pies de longitud por 60 pies de anchura, y *B* 360 pies de longitud por 100 pies de anchura. La relación de las longitudes será 500 : 360, y la de las anchuras 60 : 100. Así que tenemos

$$(500.60) : (360.100) = 5 : 6.$$

Por lo cual el campo *A* es al campo *B* como 5 es a 6.

436. *Otro ejemplo*. Tenga el campo *A* 720 pies de longitud y 88 pies de anchura; tenga el campo *B* 660 pies de longitud y 90 pies de anchura. Las relaciones estarán compuestas de la siguiente manera:

Relación de las longitudes: 720 : 660

Relación de las anchuras: 88 : 90,

y al cancelar, la relación de los campos *A* y *B* es 16 : 15.

437. Más lejos, si se requiriese comparar dos cuartos con respecto al espacio, o a los contenidos, observamos que tal relación está compuesta de tres relaciones, a saber, la de las longitudes, la de las anchuras, y la de las alturas. Hayan, por ejemplo, un cuarto *A* cuya longitud = 36 pies, anchura = 16 pies, y altura = 14 pies y un cuarto *B* cuya longitud = 42 pies, anchura = 24 pies, y altura = 10 pies; tendremos entonces estas tres relaciones:

Para la longitud: 36 : 42

Para la anchura: 16 : 24

Para la altura: 14 : 10

Y cancelando las medidas comunes esto se vuelve 4 : 5. Así, los contenidos del cuarto *A* son a los contenidos del cuarto *B* como 4 es a 5.

438. Cuando las relaciones que componemos de esta manera son iguales, resultan relaciones multiplicadas, a saber, dos relaciones iguales dan una *razón duplicada* o *razón de los cuadrados*; tres relaciones iguales producen una *razón triplicada* o *razón de los cubos*, y así sucesivamente. Por ejemplo, las relaciones $a:b$ y $a:b$ dan la relación compuesta $aa:bb$, y por eso decimos que los cuadrados están en la razón duplicada de sus raíces. Y la razón $a:b$ multiplicada tres veces da la razón $a^3:b^3$, y decimos que los cubos están en la razón triplicada de sus raíces.

439. La geometría enseña que dos espacios circulares están en la relación duplicada de sus diámetros; esto significa que son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros.

Sea *A* un espacio circular teniendo el diámetro $=45$ pies y *B* otro espacio circular cuyo diámetro $=30$ pies; el primer espacio será al segundo como 45×45 es a 30×30 o, componiendo estas dos relaciones iguales, como $9:4$. Por consiguiente, las dos áreas son el uno al otro como 9 es a 4.

440. También se ha demostrado que los contenidos sólidos de las esferas están en la razón de los cubos de los diámetros. Así, siendo de 1 pie el diámetro de un globo *A* y de 2 pies el diámetro de un globo *B*, los contenidos sólidos de *A* serán a aquellos de *B* como $1^3:2^3$ o como 1 es a 8.

Si, por tanto, las esferas están formadas de la misma sustancia, la esfera *B* pesará 8 veces más que la esfera *A*.

441. Es evidente que de esta manera podemos encontrar el peso de balas de cañón, sus diámetros, y el peso de una estando dada. Por ejemplo, esté la bala de cañón *A*, cuyo diámetro = 2 pulgadas y peso = 5 libras y, si se requiriese el peso de otra bala de cañón cuyo diámetro es = 8 pulgadas, tenemos esta proporción: $2^2:8^3=5:...$ al cuarto término, 320 libras, que da el peso de la bala *B*. Para otra bala de cañón *C* cuyo diámetro = 15 pulgadas, tendremos $2^3:15^3=5:...$ *respuesta*: $2109\frac{3}{8}$ libras.

442. Cuando se requiere la proporción de dos fracciones, como $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, siempre podemos expresarla en números enteros, porque sólo tenemos que multiplicar las dos fracciones por *bd* para obtener la proporción $ad:bc$, que es igual a la otra; de donde resulta la proporción $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}::ad:bc$. Si, por tanto, *ad* y *bc* tienen divisores comunes, la proporción puede reducirse a menos términos. Así, $\frac{15}{24}:\frac{25}{36}=15\times36:24\times25=9:10$.

443. Si quisiésemos conocer la proporción de las fracciones $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{b}$, es evidente que tendríamos $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}=b:a$, que expresamos diciendo que *dos fracciones que tienen una unidad como numerador están en la proporción recíproca o inversa de sus denominadores. Lo mismo puede decirse de dos fracciones que tienen cualquier numerador común*, porque

$\frac{c}{a}:\frac{c}{b}=b:a$. *Pero si dos fracciones tienen denominadores iguales*, como $\frac{a}{c}:\frac{b}{c}$, *están en la proporción directa de los numeradores*, a saber, como $a:b$. Así, $\frac{3}{8}:\frac{3}{16}=\frac{6}{16}:\frac{3}{16}=6:3=2:1$ y $\frac{10}{7}:\frac{15}{7}=10:15$ o $=2:3$.

444. Se observa que en la caída libre de los cuerpos, un cuerpo cae 16 pies en un segundo, que en dos segundos cae de la altura de 64 pies, que en tres segundos cae 144 pies; por tanto se concluye que las alturas son entre sí como los cuadrados de los tiempos, y que, recíprocamente, los tiempos están en la proporción subduplicada de las alturas, o como las raíces cuadradas de las alturas.

Entonces, si se requiriese encontrar cuánto tarda una piedra en caer desde una altura de 2304 pies, tenemos $16:2304=1:...$ al cuadrado del tiempo buscado. Así que el cuadrado del tiempo buscado es 144, y consecuentemente el tiempo requerido es 12 segundos.

445. Se requiere encontrar qué tanto, o a través de qué altura, pasará una piedra al caer por el espacio de una hora, esto es, de 3600 segundos; entonces decimos que $1^2:3600^2::16:207360000$ pies, la altura requerida.

Reduciendo esto descubrimos que es igual a 39272 millas, casi cinco veces más grande que el diámetro de la Tierra.

446. Es lo mismo con respecto al precio de las piedras preciosas, que no se venden en la proporción de su peso; todo mundo sabe que sus precios siguen una proporción mucho mayor. La regla para los diamantes es que el precio está en la proporción duplicada del peso, esto es, la razón de los precios es igual al cuadrado de la razón de los pesos. El peso de un diamante se expresa en quilates, y un quilate es equivalente a 4 granos; si, por tanto, un diamante de un quilate vale 10 libras francesas, un diamante de 100 quilates valdrá tantas veces 10 libras como el cuadrado de 100 contiene 1; así que tendremos, de acuerdo con la regla de tres, que $1:10000::10:...$*respuesta*: 100000 libras francesas.

En Portugal hay un diamante que pesa 1680 quilates; entonces su precio se encontrará haciendo $1^2:1680^2::10:28224000$ libras francesas.

447. Las postas o el modo de viajar en Francia proporcionan ejemplos de proporciones compuestas, ya que el precio se establece de acuerdo con la proporción

compuesta del número de caballos y del número de leguas o postas. Por ejemplo, un caballo costando 20 sous por posta, se requiere encontrar cuánto debe pagarse por 28 caballos y $4\frac{1}{2}$ postas.

Primero escribimos la razón de los caballos: 1 : 28.

Bajo esta razón ponemos la de las etapas o postas: 2 : 9.

Componiendo las dos razones tenemos: 2 : 252 o $1:126=1$ libra es a 126 francos o 42 coronas.

De nuevo, si pago un ducado por ocho caballos para 3 millas, ¿cuánto debo pagar por treinta caballos para cuatro millas? El cálculo es como sigue:

$8:30$

$3:4$

Al componer estas dos proporciones, y abreviando, tenemos que 1 : 5 :: 1 ducado : 5 ducados, que es la suma requerida.

448. Ocurre la misma composición cuando ha de pagarse a los trabajadores, porque por lo general tales pagos siguen la razón compuesta del número de trabajadores y del de los días que han estado empleados.

Si, por ejemplo, se le dan 25 sous por día a un albañil, y se requiere encontrar cuánto debe pagarse a 24 albañiles que han trabajado por 50 días, establecemos este cálculo:

1 : 24

1 : 50

1 : 1200 :: 25 : 30000 sous o 1500 francos.

Como en estos ejemplos están dadas cinco cosas, a la regla que sirve para resolverlos a veces se le llama, en los libros de aritmética, la regla de cinco.

CAPÍTULO X

DE LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

449. A una serie de números que siempre se están volviendo mayores o menores un cierto número de veces se le llama *progresión geométrica*, porque cada término está constantemente con el siguiente [número] en la misma proporción geométrica. Al número

que expresa cuántas veces cada término es mayor que el precedente se le llama *exponente*. Así, cuando el primer término es 1 y el exponente es = 2, la progresión geométrica se vuelve

Términos	1	2	3	4	5	6	7	8	9, etc.
Progresión	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256, etc.

Los números 1, 2, 3, etc., siempre marcan el lugar que cada término mantiene en la progresión.

450. Si suponemos, en general, que el primer término es $=a$ y que el exponente es $=b$, tenemos la siguiente progresión geométrica:

Términos	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,…	n
Progresión	a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4,	ab^5,	ab^6,	ab^7, …	ab^{n-1}.

Así que, cuando esta progresión consiste en *n* términos, el último término es $=ab^{n-1}$. Aquí debemos observar que si el exponente *b* es mayor que una unidad, los términos aumentan continuamente; si el exponente $b=1$, los términos son iguales, y por último, si el exponente *b* es menor que 1, o es una fracción, los términos disminuyen continuamente. De esta forma, cuando $a=1$ y $b=\frac{1}{2}$, tenemos la progresión geométrica: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64},\frac{1}{128}$, etcétera.

451. Entonces aquí tenemos que considerar:

I. Al primer término, que hemos llamado *a*.

II. Al exponente, que hemos llamado *b*.

III. Al número de términos, que hemos expresado con *n*.

IV. Al último término, que hemos visto que es $=ab^{n-1}$.

Así que cuando están dadas las tres primeras de estas cosas, al último término lo encontramos multiplicando la $n-1$ potencia de *b*, o b^{n-1}, por el primer término *a*.

Entonces, si se requiriese el término 50 de la progresión geométrica $1,2,4,8$, etc., tendríamos que $a=1, b=2$, y $n=50$; consecuentemente el término 50 es $=2^{49}$. Ahora, 2^9 siendo $=512$, 2^{10} será $=1024$. De aquí que el cuadrado de 2^{10} o $2^{20}=1048576$, y el

cuadrado de este número o $1099511627776 = 2^{40}$. Multiplicando este valor de 2^{40} por 2^9 o por 512, tenemos que 2^{49} es igual a 562949953421312.

452. Una de las principales cuestiones que ocurre aquí es encontrar la suma de todos los términos de una progresión geométrica, y por tanto explicaremos el método para hacer esto. Primero, consideremos la siguiente progresión consistente en diez términos:

$$1,2,4,8,16,32,64,128,256,512,$$

cuya suma representaremos por *s*, de tal forma que $s = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$. Al duplicar ambos lados tendremos que $2s = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$, y sustrayendo de esto la progresión representada por *s*, queda que $s = 1024 - 1 = 1023$; por lo tanto la suma requerida es 1023.

453. Ahora supongamos, en la misma progresión, que el número de términos está indeterminado y que es $= n$, así que la suma en cuestión o $s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1}$. Si multiplicamos por 2, tenemos que $2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n$, y sustrayendo de esta ecuación a la anterior, tenemos que $s = 2^n - 1$. Vemos, pues, que encontramos la suma requerida al multiplicar el último término, 2^{n-1}, por el exponente 2 para tener 2^n, y sustraemos una unidad de tal producto.

454. Esto se hará todavía más evidente con los siguientes ejemplos en los cuales sustituimos sucesivamente, por *n*, los números 1, 2, 3, 4, etcétera.

$1 = 1; 1 + 2 = 3; 1 + 2 + 4 = 7; 1 + 2 + 4 + 8 = 15;$

$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31; 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$, etcétera.

455. En este tema suele proponerse la siguiente cuestión. Un hombre se ofrece a vender su caballo por los clavos de su herradura, que son 32. Demanda 1 liard por el primer clavo, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto, y así sucesivamente, demandando siempre por cada clavo el doble del precio del anterior. Requerimos encontrar cuál será el precio del caballo.

Evidentemente esta cuestión se reduce a encontrar la suma de todos los términos de la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, etc., continuada hasta el término 32. Ahora bien, este último término es 2^{31}, y como ya hemos visto que $2^{20} = 1048576$ y que $2^{10} = 1024$, tendremos que $2^{20} \times 2^{10} = 2^{30}$ es igual a 1073741824; multiplicando otra vez por 2, el último término $2^{31} = 2147483648$, y duplicando este número y sustrayendo una unidad del

producto la suma requerida se vuelve 4294967295 liards. Estos liards hacen $1073741823\frac{3}{4}$ sous, y dividiendo entre 20 tenemos 53687091 libras, 3 sous y 9 deniers para la suma requerida.

456. Ahora sea el exponente $=3$ y requiérase encontrar la suma de la progresión geométrica 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, consistente en 7 términos. Supongamos que es $=s$, de tal forma que $s=1+3+9+27+81+243+729$. Entonces tendremos, multiplicando por 3, $3s=3+9+27+81+243+729+2187$, y sustrayendo la serie anterior tenemos $2s=2187-1=2186$. Así que el doble de la suma es 2186, y consecuentemente la suma requerida es $=1093$.

457. En la misma progresión, sea el número de términos $=n$ y la suma $=s$, de tal forma que $s=1+3+3^2+3^3+3^4+...+3^{n-1}$. Si multiplicamos por 3, tenemos $3s=3+3^2+3^3+3^4+...+3^n$. Sustrayendo de esto el valor de *s*, así como todos sus términos excepto el primero, y destruyendo todos los términos del valor de $3s$ excepto el último, tendremos $2s=3^n-1$, y por tanto $s=\frac{3^n-1}{2}$. Así que la suma requerida se encuentra al multiplicar el último término por 3, sustraer 1 del producto, y dividir el resto entre 2. Esto también será evidente por los siguientes ejemplos:

$$1=1;$$

$$1+3=\frac{3\times 3-1}{2}=4;$$

$$1+3+9=\frac{3\times 9-1}{2}=13;$$

$$1+3+9+27=\frac{3\times 27-1}{2}=40;$$

$$1+3+9+27+81=\frac{3\times 81-1}{2}=121.$$

458. Ahora supongamos que, en general, el primer término es $=a$, el exponente $=b$, el número de términos $=n$, y su suma $=s$, de tal forma que $s=a+ab+ab^2+ab^3+ab^4+...+ab^{n-1}$. Si multiplicamos por *b*, tenemos $bs=ab+ab^2+ab^3+ab^4+ab^5+...+ab^n$, y sustrayendo la ecuación de arriba queda

$(b-1)s = ab^n - a$, de donde fácilmente deducimos la suma requerida $s = \frac{a(b^n-1)}{b-1}$. Consecuentemente, *la suma de cualquier progresión geométrica se encuentra al multiplicar el último término por la proporción o exponente de la progresión, y al dividir la diferencia entre este producto y el primer término entre la diferencia entre 1 y la proporción*.

459. Haya una progresión geométrica de siete términos, de los cuales el primero es $=3$, y sea el exponente $=2$; entonces tendremos que $a=3, b=2$, y $n=7$, y por tanto el último término será $=3\times 2^6$ o $3\times 64 = 192$, y la progresión completa será $3,6,12,24,48,96,192$. Además, si multiplicamos el último término 192 por el exponente 2, tenemos 384; sustrayendo el primer término [3] queda 381, y dividiendo esto entre $b-1$, o entre 1, tenemos 381 para la suma de la progresión completa.

460. De nuevo, haya una progresión geométrica de seis términos, y sea 4 el primero y el exponente $=\frac{3}{2}$. La progresión es $4,6,9,\frac{27}{2},\frac{81}{4},\frac{243}{8}$. Si multiplicamos este último término $\frac{243}{8}$ por el exponente $\frac{3}{2}$, tenemos $\frac{729}{16}$; la sustracción del primer término 4 deja el resto $\frac{665}{16}$ que, dividido entre $b-1=\frac{1}{2}$, da $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

461. Cuando el exponente es menor que 1, y consecuentemente cuando los términos de la progresión continúan disminuyendo, la suma de tal progresión decreciente, que seguirá hasta el infinito, puede expresarse con precisión.

Por ejemplo, sea el primer término $=1$, el exponente $=\frac{1}{2}$, y la suma $=s$, de tal forma que $s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+$, etc., ad infinitum.

Si multiplicamos por 2, tenemos $2s = 2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+$, etc., ad infinitum y, sustrayendo la progresión anterior, nos queda $s=2$ para la suma de la progresión infinita propuesta.

462. Si el primer término es $=1$, el exponente $=\frac{1}{3}$, y la suma $=s$, entonces $s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$, etc., ad infinitum. Multiplicando todo por 3, tenemos $3s=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$, etc., ad infinitum, y sustrayendo el valor de *s* queda $2s=3$, y por lo tanto la suma $s=1\frac{1}{2}$.

463. Haya una progresión cuya suma es $=s$, el primer término $=2$, y el exponente $=\frac{3}{4}$, de tal forma que $s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+$, etc., ad infinitum. Multiplicando por $\frac{4}{3}$, tenemos $\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}+$, etc., ad infinitum. Sustrayendo ahora la progresión *s*, queda $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$; por tanto la suma requerida es $=8$.

464. Si suponemos, en general, que el primer término es $=a$ y que el exponente de la progresión es $=\frac{b}{c}$, de tal forma que esta fracción puede ser menor que 1 y consecuentemente *c* ser mayor que *b*, la suma de la progresión llevada ad infinitum se encontrará así: hagamos que $s=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{cc}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}$, etc. Después, multiplicando por $\frac{b}{c}$, tendremos $\frac{b}{c}s=\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{cc}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4}+$, etc., ad infinitum, y sustrayendo esta ecuación de la anterior queda $(1-\frac{b}{c})s=a$. Consecuentemente $s=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}$, y si multiplicamos ambos términos de esta fracción por *c*, tenemos $s=\frac{ac}{c-b}$. La suma de la progresión geométrica infinita propuesta se encuentra, por tanto, al dividir el primer término *a* entre 1 menos el exponente, o al multiplicar el primer término *a* por el denominador del exponente y dividir el producto entre el mismo denominador disminuido por el numerador del exponente.

465. Del mismo modo encontramos las sumas de progresiones cuyos términos se ven alternativamente afectados por los signos + y -. Sea, por ejemplo, $s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{cc} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} -$, etc. Multiplicando por $\frac{b}{c}$ tenemos $\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{cc} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} +$, etc., y añadiendo esta ecuación a la anterior obtenemos $(1+\frac{b}{c})s = a$, de donde deducimos la suma requerida $s = \frac{a}{1+\frac{b}{c}}$ o $s = \frac{ac}{c+b}$.

466. Vemos, entonces, que si el primer término $a = \frac{3}{5}$ y el exponente $= \frac{2}{5}$, esto es, si $b = 2$ y $c = 5$, encontramos la suma de la progresión $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$, etc. $= 1$, ya que, al sustraer el exponente de 1 queda $\frac{3}{5}$, y al dividir el primer término entre tal resto el cociente es 1.

Además, es evidente que si los términos son alternativamente positivos y negativos, y si la progresión asume esta forma: $\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} +$, etc., la suma será $\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$

.

467. *Otro ejemplo*. Propóngase la progresión infinita $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} +$, etc. Aquí el primer término es $\frac{3}{10}$ y el exponente es $\frac{1}{10}$. Sustrayendo este último de 1 queda $\frac{9}{10}$, y si dividimos el primer término entre esta fracción tenemos $\frac{1}{3}$ para la suma de la progresión dada. Así que al tomar sólo un término de la progresión, a saber, $\frac{3}{10}$, el error será $\frac{1}{10}$. Tomando dos términos,

$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, todavía faltará $\frac{1}{100}$ para hacer que la suma sea $= \frac{1}{3}$.

468. *Otro ejemplo más*. Sea la progresión infinita $9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}$, etc. El primer término es 9 y el exponente es $\frac{1}{10}$, así que 1 menos el exponente es $=\frac{9}{10}$, y $\frac{9}{\frac{9}{10}}=10$ es la suma requerida. Esta serie se expresa con una fracción decimal, así, 9,9999999, etcétera.

CAPÍTULO XI

DE FRACCIONES DECIMALES INFINITAS

469. Es necesario mostrar cómo una fracción vulgar puede transformarse en una fracción decimal y, a la inversa, cómo podemos expresar el valor de una fracción decimal con una fracción vulgar.

470. *Requiérase, en general, cambiar la fracción* $\frac{a}{b}$ *en una fracción decimal; como esta fracción expresa el cociente de la división del numerador a entre el denominador b, escribamos, en lugar de a, la cantidad a.0000000, cuyo valor no difiere en absoluto del de a, ya que no contiene décimas partes, ni centésimas partes, etc. Ahora dividamos esta cantidad entre el número b de acuerdo con las reglas de división comunes, observando poner el punto que separa el decimal y los enteros en el lugar apropiado*. Ésta es toda la operación, que ilustraremos con algunos ejemplos.

Si está dada la fracción $\frac{1}{2}$, la división en decimales asumirá la forma $\frac{2)1.0000000}{0.5000000}=\frac{1}{2}$. Por lo tanto parece que $\frac{1}{2}$ es igual a 0.5000000 o a 0.5, lo que es suficientemente evidente ya que esta fracción decimal representa $\frac{5}{10}$, que es equivalente a $\frac{1}{2}$.

471. Ahora sea $\frac{1}{3}$ la fracción dada, y tenemos $\frac{3)1.000000}{0.333333}$, etc. $=\frac{1}{3}$.

Esto muestra que la fracción decimal cuyo valor es $=\frac{1}{3}$ no puede ser, estrictamente hablando, descontinuada, y que sigue ad infinitum repitiendo siempre el número 3. Y es por esta razón, como ya se ha demostrado, que las fracciones $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{1000}$, etc., ad infinitum, añadidas juntas, hacen $\frac{1}{3}$.

La fracción decimal que expresa el valor de $\frac{2}{3}$ también continúa ad infinitum, porque tenemos $\frac{3)2.000000}{0.6666666}$, etc. $=\frac{2}{3}$.

Y además esto es evidente por lo que justo hemos dicho, porque $\frac{2}{3}$ es el doble de $\frac{1}{3}$

.

472. Si $\frac{1}{4}$ es la fracción propuesta, tenemos $\frac{4)1.0000000}{0.2500000}$, etc. $=\frac{1}{4}$. Así que $\frac{1}{4}$ es igual a 0.2500000 o a 0.25, y esto es evidente porque $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

Del mismo modo, para la fracción $\frac{3}{4}$ tendremos $\frac{4)3.0000000}{0.7500000}=\frac{3}{4}$. Así que $\frac{3}{4}=0.75$, y en efecto $\frac{7}{10}+\frac{5}{100}=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$.

La fracción $\frac{5}{4}$ es cambiada a una fracción decimal al hacer que $\frac{4)5.0000000}{1.2500000}=\frac{5}{4}$. Ahora, $1+\frac{25}{100}=\frac{5}{4}$.

473. De igual forma, $\frac{1}{5}$ es igual a $0.2;\frac{2}{5}=0.4;\frac{3}{5}=0.6;\frac{4}{5}=0.8;\frac{5}{5}=1;\frac{6}{5}=1.2$, etc. Cuando el denominador es 6, encontramos que $\frac{1}{6}=0.1666666$, etc., que es igual a $0.666666-0.5$. Ahora, $0.666666=\frac{2}{3}$ y $0.5=\frac{1}{2}$, por lo tanto $0.1666666=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

También encontramos que $\frac{2}{6} = 0.333333$, etc. $= \frac{1}{3}$; pero $\frac{3}{6}$ se vuelve $0.5000000 = \frac{1}{2}$. Además, $\frac{5}{6} = 0.833333 = 0.333333 + 0.5$, es decir, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

474. Cuando el denominador es 7 las fracciones decimales se vuelven más complicadas. Por ejemplo, encontramos que $\frac{1}{7} = 0.142857$; sin embargo, debemos observar que estas seis figuras se repiten continuamente. Para convencernos, pues, de que esta fracción decimal expresa de manera precisa el valor de $\frac{1}{7}$, podemos transformarla en una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{142857}{1000000}$ y el exponente $= \frac{1}{1000000}$; consecuentemente (Art. 464) la suma será $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$ (multiplicando ambos términos por 1000000) $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

475. Podemos probar, de una forma todavía más fácil, que la fracción decimal que hemos encontrado es exactamente $= \frac{1}{7}$; porque, al sustituir por su valor la letra *s*, tenemos

$$s = 0.142857142857142857, etc.$$
$$10s = 1.42857142857142857, etc.$$
$$100s = 14.2857142857142857, etc.$$
$$1000s = 142.857142857142857, etc.$$
$$10000s = 1428.57142857142857, etc.$$
$$100000s = 14285.7142857142857, etc.$$
$$1000000s = 142857.142857142857, etc.$$

Sustrayendo $s = 0.142857142857, etc.$

$$999999s = 142857.$$

Y dividiendo entre 999999 tenemos $s = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$, y por tanto la fracción decimal que fue hecha $= s$ es $= \frac{1}{7}$.

476. Del mismo modo puede transformarse $\frac{2}{7}$ en una fracción decimal que será 0.28571428, etc., y esto nos permite encontrar de manera más fácil el valor de la fracción decimal que hemos supuesto $= s$, porque 0.28571428, etc., debe ser su doble, y consecuentemente $= 2s$. Ya que hemos visto que $100s = 14.2857142857, etc.$, al sustraer $2s = 0.28571428571, etc.$, queda $98s = 14$, y por tanto $s = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}$.

También encontramos que $\frac{3}{7} = 0.42857142857$, etc., debe ser, de acuerdo con nuestra suposición, $= 3s$. Ahora, hemos encontrado que $10s = 1.42857142857$, etc., así que al sustraer $3s = 0.42857142857$, etc., tenemos $7s = 1$, y por tanto $s = \frac{1}{7}$.

477. Por consiguiente, cuando una fracción propuesta tiene 7 como denominador, la fracción es infinita y se repiten continuamente 6 figuras. La razón, como es fácil de percibir, es que cuando continuamos la división debemos regresar, tarde o temprano, a un resto que ya teníamos antes. Ahora, en esta división, sólo pueden formar el resto 6 números distintos, a saber, 1, 2, 3, 4, 5, 6, así que, después de la sexta división, a lo mucho, deben regresar las seis figuras. Pero cuando el denominador es tal que conduce a una división sin resto, estos casos no ocurren.

478. Ahora supongamos que 8 es el denominador de la fracción propuesta; entonces encontraremos las siguientes fracciones decimales:

$$\frac{1}{8} = 0.125; \frac{2}{8} = 0.25; \frac{3}{8} = 0.375; \frac{4}{8} = 0.5; \frac{5}{8} = 0.625; \frac{6}{8} = 0.75; \frac{7}{8} = 0.875, etc.$$

Si el denominador es 9, tenemos $\frac{1}{9} = 0.111, etc., \frac{2}{9} = 0.222, etc., \frac{3}{9} = 0.333, etc.$ Si el denominador es 10, tenemos $\frac{1}{10} = 0.1; \frac{2}{10} = 0.2; \frac{3}{10} = 0.3$. Esto es evidente por la naturaleza de la cosa, como también lo es que $\frac{1}{100} = 0.01$, que $\frac{37}{100} = 0.37$, que $\frac{256}{1000} = 0.256$, que $\frac{24}{10000} = 0.0024$, etc.

479. Si 11 es el denominador de la fracción dada, tendremos que $\frac{1}{11} = 0.0909090$, etc. Ahora supongamos que se requiriese encontrar el valor de esta fracción decimal. Llamémosla *s*, y de esta forma $s = 0.0909090$ y $10s = 00.909090$ y $100s = 9.09090$. Entonces, si sustraemos de lo último el valor de *s* tendremos $99s = 9$, y consecuentemente $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. También tenemos que $\frac{2}{11} = 0.181818, etc., \frac{3}{11} = 0.272727, etc., \frac{6}{11} = 0.545454, etc.$

480. Hay, pues, un gran número de fracciones decimales en donde una, dos, o más figuras se repiten constantemente, y de esta forma continúan hasta el infinito. Tales fracciones son curiosas, y mostraremos cómo pueden encontrarse sus valores fácilmente.

Primero supongamos que una sola figura es la que se repite constantemente, y representémosla por *a* de tal forma que $s = 0.aaaaaaa$. Tenemos que $10s = a.aaaaaaa$, y sustrayendo $s = 0.aaaaaaa$ tenemos que $9s = a$; por lo tanto $s = \frac{a}{9}$.

Cuando se repiten dos figuras, como *ab*, tenemos que $s = 0.ababab$. Por lo tanto $100s = ab.ababab$, y si sustraemos *s* de esto, queda $99s = ab$, y consecuentemente $s = \frac{ab}{99}$.

Cuando se repiten tres figuras, como *abc*, tenemos que $s = 0.abcabcabc$; consecuentemente $1000s = abc.abcabc$, y sustrayendo *s* de esto queda $999s = abc$, de donde se sigue que $s = \frac{abc}{999}$, y así sucesivamente.

Así entonces, siempre que ocurra una fracción de este tipo es fácil encontrar su valor. Esté dado, por ejemplo, 0.296296; su valor será $\frac{296}{999} = \frac{8}{27}$, dividiendo ambos términos entre 27.

Esta fracción debe darnos, de nuevo, la fracción decimal propuesta, y fácilmente podemos convencernos de que éste es el resultado real si dividimos 8 entre 9 y después tal cociente entre 3, porque $27 = 3 \times 9$. Así, tenemos

9)8.0000000

3)0.8888888

0.2962962 , etc.,

que es la fracción decimal propuesta.

481. Ofreceremos un curioso ejemplo de esto transformando la fracción $\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9\times 10}$ en una fracción decimal. La operación es como sigue:

2)1.00000000000000
3)0.50000000000000
4)0.16666666666666
5)0.04166666666666
6)0.00833333333333
7)0.00138888888888
8)0.00019841269841
9)0.00002480158730
10)0.00000275573192
0.00000027557319.

SECCIÓN IV

DE ECUACIONES ALGEBRAICAS Y DE SU RESOLUCIÓN

CAPÍTULO I

DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GENERAL

482. El objetivo principal del álgebra, así como de todas las partes de las matemáticas, es determinar el valor de cantidades antes desconocidas. Esto se consigue considerando atentamente las condiciones dadas, que siempre se expresan con números conocidos. Es por esta razón que al álgebra se le ha definido como *la ciencia que enseña cómo determinar cantidades desconocidas por medio de cantidades conocidas*.

483. La definición recién ofrecida concuerda con todo lo que hemos establecido hasta ahora. Siempre hemos visto que el conocimiento de ciertas cantidades conduce al de otras cantidades que antes podrían haberse considerado como desconocidas. De esto la adición fácilmente proporcionará un ejemplo. Para encontrar la suma de dos o más números dados, tuvimos que buscar un número desconocido que fuese igual a tales números conocidos tomados juntos. En la sustracción, buscamos un número que fuese igual a la diferencia de dos números conocidos. La multiplicación, la división, la involución de potencias, y la extracción de raíces presentan una multitud de otros ejemplos. La cuestión, pues, siempre se reduce a encontrar, por medio de cantidades conocidas, otra cantidad hasta entonces desconocida.

484. En la última sección también resolvimos distintas cuestiones en las que se requería determinar un número que no podía deducirse del conocimiento de otros números dados excepto bajo ciertas condiciones. Todas aquellas cuestiones se redujeron a encontrar, con la ayuda de algunos números dados, un nuevo número que tuviese una cierta conexión con ellos, y esta conexión estuvo determinada por ciertas condiciones o propiedades que concordaban con la cantidad buscada.

485. *Cuando se nos presenta una cuestión a resolver, representamos el número buscado con una de las últimas letras del alfabeto, y después consideramos de qué manera las condiciones dadas pueden formar una igualdad entre dos cantidades*. Esta igualdad, representada por una especie de fórmula llamada *ecuación*, nos permite determinar por fin

el valor del número buscado, y consecuentemente resolver la cuestión. A veces sucede que uno busca varios números, pero éstos se encuentran de la misma manera, i. e., por medio de ecuaciones.

486. Tratemos de explicar más a fondo esto con un ejemplo. Supongamos la siguiente cuestión o *problema*. Veinte personas, hombres y mujeres, cenan en una taberna. La cuota de la cuenta para un hombre es 8 sous, para una mujer 7 sous, y la cuenta total asciende a 7 libras 5 sous. A partir de esto, se requiere encontrar el número de hombres y el de mujeres.

Para resolver esta cuestión, supongamos que el número de hombres es $= x$, y ahora, considerando este número como conocido, procederemos de la misma manera que como si quisiésemos probar si corresponde con las condiciones de la cuestión. Ahora, siendo el número de hombres $= x$, y los hombres y mujeres haciendo juntos veinte personas, es fácil determinar el número de mujeres, teniendo sólo que sustraer el [número] de los hombres de 20, esto es, el número de mujeres es $= 20 - x$. Pero cada hombre gasta 8 sous; por tanto, x hombres gastan $8x$ sous. Y como cada mujer gasta 7 sous, $20 - x$ mujeres deben gastar $140 - 7x$ sous.

Así que añadiendo $8x$ y $140 - 7x$, vemos que las 20 personas deben gastar $140 + x$ sous. Ahora bien, ya sabemos cuánto han gastado, a saber, 7 libras 5 sous o 145 sous; por lo tanto debe haber una igualdad entre $140 + x$ y 145, es decir, tenemos la ecuación $140 + x = 145$, y entonces fácilmente deducimos que $x = 5$. Así pues, el grupo consistía en 5 hombres y 15 mujeres.

487. *Otra cuestión del mismo tipo*. Veinte personas, hombres y mujeres, van a una taberna. Los hombres gastan 24 florines y las mujeres lo mismo, pero se descubre que cada hombre ha gastado 1 florín más que cada mujer. Se requiere el número de hombres y el de mujeres.

Sea el número de hombres $= x$. El de las mujeres será $= 20 - x$. Ahora, estos x hombres habiendo gastado 24 florines, la cuota de cada hombre es $\frac{24}{x}$ florines. Además, las $20 - x$ mujeres habiendo también gastado 24 florines, la cuota de cada mujer es $\frac{24}{20 - x}$ florines.

Pero sabemos que la cuota de cada mujer es un florín menos que la de cada hombre; si, por tanto, sustraemos 1 de la cuota de un hombre, debemos obtener la de una mujer, y consecuentemente $\frac{24}{x}-1=\frac{24}{20-x}$. Ésta, entonces, es la ecuación de la que habremos de deducir el valor de *x*. Este valor no se encuentra con la misma facilidad que en la cuestión anterior, pero pronto vemos que $x=8$, y que éste valor corresponde con la ecuación, porque $\frac{24}{8}-1=\frac{24}{12}$ incluye la igualdad $2=2$.

488. Es evidente qué esencial es, en todos los problemas, considerar atentamente las circunstancias de la cuestión para deducir de ella una ecuación que exprese, con letras, los números buscados o desconocidos. Después de eso, todo el arte consiste en resolver tales ecuaciones o en derivar de ellas los valores de los números desconocidos, y éste será el tema de la presente sección.

489. En primer lugar debemos observar la diversidad subsistente entre las propias cuestiones. En algunas buscamos solamente una cantidad desconocida, mientras que en otras tenemos que encontrar dos o más, y debemos notar, con respecto a este último caso, que para determinarlas todas debemos deducir de las circunstancias, o de las condiciones del problema, tantas ecuaciones como haya cantidades desconocidas.

490. Ya se habrá percibido que una ecuación consiste en dos partes separadas por el signo de igualdad, =, para mostrar que tales dos cantidades son iguales entre sí. A veces nos vemos obligados a realizar un gran número de transformaciones sobre tales dos partes para así deducir de ellas el valor de la cantidad desconocida, pero todas estas transformaciones deben estar fundadas sobre los siguientes principios: que *dos cantidades siguen siendo iguales si añadimos a ellas, o sustraemos de ellas, cantidades iguales, si las multiplicamos o dividimos por el mismo número, si ambas las elevamos a la misma potencia, o si extraemos sus raíces del mismo grado*.

491. Las ecuaciones que se resuelven más fácilmente son aquellas en donde la cantidad desconocida no sobrepasa la primera potencia después de haber arreglado propiamente los términos de la ecuación, y a tales ecuaciones las llamamos *ecuaciones simples* o *ecuaciones de primer grado*. Pero si, después de haber reducido y ordenado una ecuación, encontramos en ella el cuadrado o la segunda potencia de la cantidad

desconocida, podemos llamarla una *ecuación de segundo grado*, que es más difícil de resolver.

CAPÍTULO II

DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES SIMPLES O DE PRIMER GRADO

492. Cuando el número buscado, o la cantidad desconocida, está representado por la letra *x*, y la ecuación que hemos obtenido es tal que un lado contiene únicamente tal *x* y el otro simplemente un número conocido, como por ejemplo $x = 25$, el valor de *x* ya está encontrado. Siempre debemos tratar, pues, de llegar a tal forma no obstante qué tan complicada pueda ser la ecuación en un primer momento. En el curso de esta sección ofreceremos las reglas que sirven para facilitar estas reducciones.

493. Comencemos con los casos más simples, y supongamos, primero, que hemos llegado a la ecuación $x + 9 = 16$; inmediatamente vemos que $x = 7$. Y, en general, si hemos encontrado que $x + a = b$, donde a y b expresan cualesquiera números conocidos, sólo tenemos que sustraer *a* de ambos lados para obtener la ecuación $x = b - a$, lo que indica el valor de *x*.

494. Si la ecuación que hemos encontrado es $x - a = b$, añadimos *a* en ambos lados y obtenemos el valor de $x = b + a$. Procedemos de la misma manera si la ecuación tiene la forma $x - a = aa + 1$, porque inmediatamente tendremos que $x = aa + a + 1$. En la ecuación $x - 8a = 20 - 6a$ encontramos que $x = 20 - 6a + 8a$ o $x = 20 + 2a$. Y en $x + 6a = 20 + 3a$ tenemos que $x = 20 + 3a - 6a$ o $x = 20 - 3a$.

495. Si la ecuación original tiene la forma $x - a + b = c$, podemos comenzar por añadir *a* en ambos lados, lo que nos da $x + b = c + a$, y después sustraer *b* de ambos lados, lo que nos da $x = c + a - b$. Pero también podemos añadir $+a - b$ de una sola vez en ambos lados, y con esto inmediatamente obtenemos $x = c + a - b$.

Así en los siguientes ejemplos,

Si $x - 2a + 3b = 0$, tenemos $x = 2a - 3b$.

Si $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, tenemos $x = 25 + 4a$.

Si $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, tenemos $x = 34 - 4a$.

496. Cuando la ecuación que hemos encontrado tiene la forma $ax = b$, únicamente dividimos los dos lados entre a y tenemos $x = \frac{b}{a}$. Pero si la ecuación tiene la forma $ax + b - c = d$, primero debemos hacer desaparecer los términos que acompañan a ax añadiendo $-b + c$ a ambos lados [de la ecuación] y después dividir la nueva ecuación $ax = d - b + c$ entre *a*, lo que nos da $x = \frac{d - b + c}{a}$.

Habríamos encontrado el mismo valor si hubiésemos sustraído $+b - c$ de la ecuación dada, esto es, de la misma forma habríamos tenido $ax = d - b + c$ y $x = \frac{d - b + c}{a}$. Por lo tanto,

Si $2x + 5 = 17$, tenemos $2x = 12$ y consecuentemente $x = 6$.

Si $3x - 8 = 7$, tenemos $3x = 15$ y consecuentemente $x = 5$.

Si $4x - 5 - 3a = 15 + 9a$, tenemos $4x = 20 + 12a$ y consecuentemente $x = 5 + 3a$.

497. Cuando la primera ecuación tiene la forma $\frac{x}{a} = b$, multiplicamos ambos lados por a para tener $x = ab$. Pero si tenemos $\frac{x}{a} + b - c = d$, primero debemos hacer que $\frac{x}{a} = d - b + c$, después de lo cual tenemos $x = (d - b + c)a = ad - ab + ac$. Sea $\frac{1}{2}x - 3 = 4$; entonces $\frac{1}{2}x = 7$ y $x = 14$. Sea $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$; entonces $\frac{1}{3}x = 4 - a$ y $x = 12 - 3a$. Sea $\frac{x}{a - 1} - 1 = a$; entonces $\frac{x}{a - 1} = a + 1$ y $x = aa - 1$.

498. Cuando hemos llegado a una ecuación como $\frac{ax}{b} = c$, primero multiplicamos por b para tener $ax = bc$ y después, al dividir entre *a*, encontramos que $x = \frac{bc}{a}$. Si $\frac{ax}{b} - c = d$, comenzamos por darle a la ecuación la forma $\frac{ax}{b} = d + c$, después de lo cual obtenemos el valor de $ax = bd + bc$ y de $x = \frac{bd + bc}{a}$. Supongamos que $\frac{2}{3}x - 4 = 1$;

entonces tendremos $\frac{2}{3}x = 5$ y $2x = 15$; por lo tanto $x = \frac{15}{2}$ o $= 7\frac{1}{2}$. Si $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, entonces $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$; por lo tanto $3x = 18$ y $x = 6$.

499. Ahora consideremos el caso, que puede ocurrir con mucha frecuencia, en el que dos o más términos contienen la letra *x*, ya sea en un lado de la ecuación o en ambos lados.

Si tales términos están todos en el mismo lado, como en la ecuación $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, tenemos $x + \frac{1}{2}x = 6$ o $3x = 12$, y por último $x = 4$. Sea $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$ y requiérase el valor de *x*. Si primero multiplicamos por 3 tendremos $4x + \frac{3}{2}x = 132$, y si después multiplicamos por 2 tendremos $11x = 264$, y por tanto $x = 24$. Podríamos haber procedido de una manera más corta si hubiésemos comenzado reduciendo los tres términos que contienen *x* al único término $\frac{11}{6}x$ y después dividiendo la ecuación $\frac{11}{6}x = 44$ entre 11, y así habríamos tenido $\frac{1}{6}x = 4$ y por tanto $x = 24$.

Sea $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$. Entonces tendremos, por reducción, $\frac{5}{12}x = 1$ y $x = 2\frac{2}{5}$. Más en general, sea $ax - bx + cx = d$; esto es lo mismo que $(a - b + c)x = d$, de donde derivamos que $x = \frac{d}{a - b + c}$.

500. Cuando hay términos que contienen *x* en ambos lados de la ecuación, comenzamos por hacer que tales términos desaparezcan del lado del que es más fácil hacerlo, esto es, en donde hay menos de ellos. Si tenemos, por ejemplo, la ecuación $3x + 2 = x + 10$, primero debemos sustraer *x* de ambos lados, lo que nos da $2x + 2 = 10$, y por tanto $2x = 8$ y $x = 4$.

Sea $x + 4 = 20 - x$; aquí es evidente que $2x + 4 = 20$ y que consecuentemente $2x = 16$ y $x = 8$.

Sea $x + 8 = 32 - 3x$; entonces tendremos $4x + 8 = 32$ y después $4x = 24$ y $x = 6$.

Sea $15 - x = 20 - 2x$; entonces tendremos $15 + x = 20$ y $x = 5$.

Sea $1+x=5-\frac{1}{2}x$; entonces tendremos $1+\frac{3}{2}x=5$, después de lo cual $\frac{3}{2}x=4$, $3x=8$, y por último $x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$.

Si $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}x$, debemos añadir $\frac{1}{3}x$, lo que nos da $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}x$; sustrayendo $\frac{1}{3}$ queda $\frac{1}{12}x=\frac{1}{6}$, y multiplicando por 12 obtenemos $x=2$.

Si $1\frac{1}{2}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x$, añadimos $\frac{2}{3}x$ y nos da $1\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{7}{6}x$. Sustrayendo $\frac{1}{4}$ tenemos $\frac{7}{6}x=1\frac{1}{4}$, de donde deducimos que $x=1\frac{1}{14}=\frac{15}{14}$ al multiplicar por 6 y dividir entre 7.

501. Si tenemos una ecuación en la que el número desconocido *x* es un denominador, debemos hacer desaparecer la fracción al multiplicar toda la ecuación por tal denominador. Supongamos haber encontrado que $\frac{100}{x}-8=12$. Primero añadimos 8 [en ambos lados] y tenemos $\frac{100}{x}=20$; después, al multiplicar por *x*, tenemos $100=20x$, y dividiendo entre 20 encontramos que $x=5$.

Sea $\frac{5x+3}{x-1}=7$. Si multiplicamos por $x-1$ tenemos $5x+3=7x-7$; sustrayendo $5x$ queda $3=2x-7$; añadiendo 7 tenemos $2x=10$, y por tanto $x=5$.

502. A veces también encontramos signos radicales en las ecuaciones de primer grado. Por ejemplo, se requiere un número *x*, por debajo de 100, tal que la raíz cuadrada de $100-x$ sea igual a 8, o $\sqrt{(100-x)}=8$. El cuadrado de ambos lados será $100-x=64$, y añadiendo x tenemos $100=64+x$, de donde obtenemos $x=100-64=36$. O, ya que $100-x=64$, pudimos haber sustraído 100 de ambos lados y entonces habríamos tenido $-x=-36$, y multiplicando por $-1, x=36$.

CAPÍTULO III

DE LA SOLUCIÓN DE CUESTIONES RELACIONADAS
CON EL CAPÍTULO ANTERIOR

503. *Cuestión I*. Dividir 7 en dos partes tales que la mayor exceda a la menor por 3. Sea la parte mayor $= x$; entonces la menor será $= 7 - x$, así que $x = 7 - x + 3$ o $x = 10 - x$. Añadiendo *x* tenemos $2x = 10$, y dividiendo entre 2 el resultado es $x = 5$.

Respuesta. La parte mayor es 5 y la menor es 2.

Cuestión II. Se requiere dividir *a* en dos partes tales que la mayor exceda a la menor por *b*. Sea la parte mayor $= x$; entonces la otra será $a - x$, así que $x = a - x + b$. Añadiendo *x* tenemos $2x = a + b$, y dividiendo entre 2, $x = \frac{a+b}{2}$.

Otra solución. Sea la parte mayor $= x$, que como excede a la menor por *b*, es evidente que la menor es más pequeña que la otra por *b*, y por tanto debe ser $= x - b$. Ahora, estas dos partes tomadas juntas deben dar *a*, así que $2x - b = a$, y añadiendo *b* tenemos $2x = a + b$, y por tanto $x = \frac{a+b}{2}$, que es el valor de la parte mayor; el de la parte menor será $\frac{a+b}{2} - b$ o $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ o $\frac{a-b}{2}$.

504. *Cuestión III*. Un padre de tres hijos les hereda 1600 coronas. El testamento especifica que el mayor debe recibir 200 coronas más que el segundo y que el segundo debe recibir 100 coronas más que el menor, y se requiere lo que recibe cada hijo. Sea la parte del tercer hijo $= x$; entonces la del segundo será $= x + 100$ y la del mayor $= x + 300$. Ahora, estas tres partes juntas dan 1600 coronas, y entonces tenemos que $3x + 400 = 1600, 3x = 1200,$ y $x = 400$.

Respuesta. La parte del menor son 400 coronas, la del segundo 500, y la del mayor 700.

505. *Cuestión IV*. Un padre deja cuatro hijos y 8600 libras. De acuerdo con el testamento, la parte del mayor ha de ser el doble que la parte del segundo menos 100 libras; el segundo hijo ha de recibir tres veces tanto como el tercero menos 200 libras, y el tercero ha de recibir cuatro veces tanto como el cuarto menos 300 libras, y se requieren las respectivas porciones de los cuatro hijos.

Llamemos x a la porción del menor; entonces la del tercer hijo será $=4x-300$, la del segundo $=12x-1100$, y la del mayor $=24x-2300$. La suma de estas cuatro partes debe dar 8600 libras. Tenemos, por tanto, la ecuación $41x-3700=8600$, o $41x=12300$, y $x=300$.

Respuesta. El menor debe tener 300 libras, el tercero hijo 900, el segundo 2500, y el mayor 4900.

506. *Cuestión V*. Un hombre deja 11000 coronas a ser divididas entre su viuda, sus dos hijos, y sus tres hijas. Pretende que la madre reciba el doble de lo de un hijo, y que cada hijo reciba el doble de lo de una hija, y se requiere cuánto ha de recibir cada quien.

Supongamos que la parte de una hija es $=x$; consecuentemente la de un hijo es $=2x$ y la de la viuda $=4x$. Toda la herencia es, pues, $3x+4x+4x$, así que $11x=11000$ y $x=1000$.

Respuesta. Cada hija recibe 1000 coronas, así que las tres reciben 3000 en total; cada hijo recibe 2000 coronas, así que los dos hijos reciben 4000 en total, y la madre recibe 4000 coronas. La suma da 1100 coronas.

507. *Cuestión VI*. En su testamento, un padre pretende que sus tres hijos compartan su propiedad de la siguiente manera: el mayor ha de recibir 1000 coronas menos que la mitad de toda la fortuna; el segundo ha de recibir 800 coronas menos que la tercera parte de toda la propiedad, y el tercero ha de tener 600 coronas menos que la cuarta parte de la propiedad, y requerimos la suma de toda la fortuna y la parte de cada hijo.

Expresemos la fortuna con *x*. La parte del primer hijo es $\frac{1}{2}x-1000$; la del segundo es $\frac{1}{3}x-800$, y la del tercero es $\frac{1}{4}x-600$, así que los tres hijos reciben en total $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-2400$, y esta suma debe ser igual a *x*.

Tenemos, pues, la ecuación $\frac{13}{12}x-2400=x$. Sustrayendo *x* queda $\frac{1}{12}x-2400=0$, y añadiendo 2400 tenemos $\frac{1}{12}x=2400$. Por último, multiplicando por 12 el producto es: *x* igual a 28800.

Respuesta. La fortuna consiste en 28800 coronas, y el mayor de los hijos recibe 13400, el segundo 8800, y el menor 6600.

508. *Cuestión VII*. Un padre deja cuatro hijos que reparten su propiedad de la siguiente manera: el primero toma la mitad de la fortuna menos 3000 libras; el segundo toma la tercera parte menos 1000 libras; el tercero toma exactamente la cuarta parte de la propiedad, y el cuarto toma 600 libras y la quinta parte de la propiedad. ¿Cuánto fue toda la fortuna y cuánto recibió cada hijo?

Sea toda la fortuna $= x$; entonces el mayor de los hijos tendrá $\frac{1}{2}x - 300$, el segundo $\frac{1}{3}x - 1000$, el tercero $\frac{1}{4}x$, y el menor $\frac{1}{5}x + 600$. En total, los cuatro habrán recibido $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, que debe ser igual a *x*. De aquí resulta la ecuación $\frac{77}{60}x - 3400 = x$; sustrayendo x tenemos $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$; añadiendo 3400 tenemos $\frac{17}{60}x = 3400$; dividiendo entre 17 tenemos $\frac{1}{60}x = 200$, y multiplicando por 60 tenemos que $x = 12000$.

Respuesta. La fortuna consiste en 12000 libras, y cada uno de los hijos recibió 3000 libras [$3000 \times 4 = 12000$].

509. *Cuestión VIII*. Encontrar un número tal que si le añadimos su mitad, la suma excede 60 por tanto como el propio número es menor que 65. Sea el número $= x$; entonces $x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x$, esto es, $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$. Añadiendo x tenemos $\frac{5}{2}x - 60 = 65$; añadiendo 60 tenemos $\frac{5}{2}x = 125$; dividiendo entre 5 tenemos $\frac{1}{2}x = 25$, y multiplicando por 2 tenemos que $x = 50$.

Respuesta. El número buscado es 50.

510. *Cuestión IX*. Dividir 32 en dos partes tales que, si la menor es dividida entre 6 y la mayor entre 5, los dos cocientes tomados juntos puedan dar 6.

Sea la menor de las dos partes buscadas $= x$; entonces la mayor será $= 32 - x$. La primera parte dividida entre 6 da $\frac{x}{6}$ y la segunda dividida entre 5 da $\frac{32 - x}{5}$. Ahora,

$\frac{x}{6}+\frac{32-x}{5}=6$, así que al multiplicar por 5 tenemos $\frac{5}{6}x+32-x=30$ o $-\frac{1}{6}x+32=30$. Añadiendo $\frac{1}{6}x$ tenemos $32=30+\frac{1}{6}x$; sustrayendo 30 queda $2=\frac{1}{6}x$, y multiplicando por 6 tenemos que $x=12$.

Respuesta. Las dos partes son: la menor $=12$, la mayor $=20$.

511. *Cuestión X*. Encontrar un número que, si es multiplicado por 5, el producto sea como mucho menor que 40 como el propio número es menor que 12. Llamemos x a este número. Es menor que 12 por $12-x$. Tomando el número x cinco veces tenemos $5x$, que es menos que 40 por $40-5x$, y esta cantidad debe ser igual a $12-x$. Tenemos, pues, que $40-5x=12-x$; añadiendo $5x$ tenemos $40=12+4x$; sustrayendo 12 tenemos $28=4x$, y dividiendo entre 4 tenemos que $x=7$, el número buscado.

512. *Cuestión XI*. Dividir 25 entre dos partes tales que la mayor contenga a la menor 49 veces. Sea la parte menor $=x$; entonces la mayor será $=25-x$. Así pues, la última [parte] dividida entre la primera debe de darnos el cociente 49; tenemos por tanto que $\frac{25-x}{x}=49$. Multiplicando por x tenemos $25-x=49x$, añadiendo x, $25=50x$, y dividiendo entre 50 tenemos que $x=\frac{1}{2}$.

Respuesta. El menor de los dos números buscados es $\frac{1}{2}$ y el mayor es $24\frac{1}{2}$; dividiendo el último entre el primero, o multiplicándolo por 2, obtenemos 49.

513. *Cuestión XII*. Dividir 48 entre nueve partes de tal forma que cada parte sea siempre $\frac{1}{2}$ mayor que la parte que le precede. Sea la parte menor o primera $=x$; entonces la segunda será $=x+\frac{1}{2}$, la tercera $=x+1$, etc. Ahora bien, estas partes forman una progresión aritmética cuyo primer término es $=x$, y por tanto el noveno y último [término] será $=x+4$. Añadiendo estos dos términos tenemos $2x+4$; multiplicando esta cantidad por el número de términos, o por 9, tenemos $18x+36$, y dividiendo este producto entre 2 obtenemos la suma de todas las nueve partes, a saber, $9x+18$, que debe ser igual a 48.

Tenemos, pues, que $9x+18=40$; sustrayendo 18 nos queda $9x=30$, y dividiendo entre 9 tenemos que $x=3\frac{1}{3}$.

Respuesta. La primera parte es $3\frac{1}{3}$ y las nueve partes se suceden en el siguiente orden: $3\frac{1}{3}+3\frac{5}{6}+4\frac{1}{3}+4\frac{5}{6}+5\frac{1}{3}+5\frac{5}{6}+6\frac{1}{3}+6\frac{5}{6}+7\frac{1}{3}$, que juntas dan 48.

514. *Cuestión XIII*. Encontrar una progresión aritmética cuyo primer término sea $=5$, el último $=10$, y la suma $=60$. Para este caso no conocemos ni la diferencia ni el número de términos, pero sabemos que el primero y el último término nos permiten expresar la suma de la progresión siempre que esté dado el número de términos. Siendo así las cosas, supondremos que este número es $=x$ y expresaremos la suma de la progresión por $\frac{15x}{2}$. Ahora, sí sabemos que esta suma es 60, así que $\frac{15x}{2}=60$, $\frac{1}{2}x=4$, y $x=8$. Ya que el número de términos es 8, si suponemos que la diferencia es $=z$ sólo tenemos que buscar el octavo término dada esta suposición y hacerlo $=10$. El segundo término es $5+z$, el tercero es $5+2z$, y el octavo es $5+7z$, así que $5+7z=10$, $7z=5$, y $z=\frac{5}{7}$.

Respuesta. La diferencia [entre los términos] de la progresión es $\frac{5}{7}$ y el número de términos es 8; consecuentemente la progresión es: $5+5\frac{5}{7}+6\frac{3}{7}+7\frac{1}{7}+7\frac{6}{7}+8\frac{4}{7}+9\frac{2}{7}+10$, cuya suma es $=60$.

515. *Cuestión XIV*. Encontrar un número tal que, si 1 es sustraído de su doble y el resto es duplicado, entonces, si 2 es sustraído y el resto es dividido entre 4, el número que resulta de estas operaciones será 1 menos que el número buscado.

Supongamos que este número es $=x$. Su doble es $2x$; sustrayendo 1 queda $2x-1$; duplicando esto tenemos $4x-2$; sustrayendo 2 nos queda $4x-4$, y dividiendo entre 4 tenemos $x-1$, y esto debe ser menos que *x*, así que $x-1=x-1$. Pero esto es lo que se llama una *ecuación idéntica*, y muestra que *x* es indeterminado, o que cualquier número puede ser sustituido por *x*.

516. *Cuestión XV*. Compré algunas varas de paño a razón de 7 coronas por 5 varas, que vendí de nuevo a razón de 11 coronas por 7 varas y gané 100 coronas por tal operación. ¿Cuánto paño había?

Supongamos que había x varas de paño; primero debemos ver cuánto costó el paño, y esto lo hacemos por la siguiente proporción: si cinco varas cuestan 7 coronas, ¿cuánto cuestan x varas? *Respuesta*: $\frac{7}{5}x$ coronas. Esto fue lo que desembolsé, y veamos ahora cuánto recibí por la siguiente proporción: como 7 varas son a 11 coronas, así también x varas son a $\frac{11}{7}x$ coronas. Esto que recibí debe exceder al gasto por 100 coronas, así que tenemos la ecuación $\frac{11}{7}x = \frac{11}{5}x + 100$. Sustrayendo $\frac{7}{5}x$ queda $\frac{6}{35}x = 100$, y por tanto $6x = 3500$ y $x = 583\frac{1}{3}$.

Respuesta. Había $583\frac{1}{3}$ varas que fueron compradas por $816\frac{2}{3}$ coronas y vendidas de nuevo por $916\frac{2}{3}$ coronas, y de esta forma la ganancia fue de 100 coronas.

517. *Cuestión XVI*. Una persona compra 12 piezas de ropa por 140 coronas. Dos son blancas, tres son negras, y siete son azules. Una pieza de ropa negra cuesta dos coronas más que una pieza blanca, y una pieza azul cuesta tres coronas más que una pieza negra, y requerimos saber el precio de cada tipo. Cueste x coronas una pieza blanca; entonces las dos piezas de este tipo costarán $2x$. Además, una pieza negra costando $x+2$, las tres piezas de este color costarán $3x+6$. Por último, una pieza azul cuesta $x+5$, y de aquí que las siete piezas azules cuesten $7x+35$. Así pues, las doce piezas cuestan en total $12x+41$. Ahora, el precio real y conocido de estas doce piezas es 140 coronas, así que $12x+41=140$, y $12x=99$, y por tanto $x=8\frac{1}{4}$, de tal forma que una pieza de ropa blanca cuesta $8\frac{1}{4}$ coronas, una de ropa negra $10\frac{1}{4}$ coronas, y una de ropa azul $13\frac{1}{4}$ coronas.

518. *Cuestión XVII*. Un hombre, habiendo comprado algunas nueces moscada, dice que tres nueces cuestan como mucho más que un sous como cuatro cuestan más que diez liards, y requerimos el precio de tales nueces.

Llamaremos x al exceso del precio de tres nueces sobre un sous o cuatro liards, y diremos que, si tres nueces cuestan $x+4$ liards, entonces cuatro costarán, dada la condición de la cuestión, $x+10$ liards. Ahora bien, el precio de tres nueces nos da el de cuatro nueces de otra manera, a saber, por la regla de tres. Así, hacemos que $3:x+4::4:\frac{4x+16}{3}$.

Siendo así esto, $\frac{4x+16}{3}=x+10$, o $4x+16=3x+30$, y por tanto $x+16=30$ y $x=14$. *Respuesta*. Tres nueces cuestan 18 liards y cuatro cuestan 6 sous; por tanto cada una cuesta 6 liards.

519. *Cuestión XVIII*. Una persona tiene dos copas de plata y sólo una cubierta para las dos. La primera copa pesa 12 onzas, y si se le pone la cubierta, pesa el doble que la otra copa; pero si es la otra copa la que es cubierta, pesa tres veces más que la primera. Se requiere el peso de la segunda copa y el de la cubierta.

Supongamos que el peso de la cubierta es $=x$ onzas; si la primera copa está cubierta pesará $x+12$ onzas. Ahora, este peso siendo el doble que el de la segunda copa, esta copa debe pesar $\frac{1}{2}x+6$. Si es cubierta, entonces pesará $\frac{3}{2}x+6$, y este peso debe ser el triple de 12, esto es, tres veces el peso de la primera copa. Tendremos entonces la ecuación $\frac{3}{2}x+6=36$, o $\frac{3}{2}x=30$, y por tanto $\frac{1}{2}x=10$ y $x=20$.

Respuesta. La cubierta pesa 20 onzas y la segunda copa 16.

520. *Cuestión XIX*. Un banquero tiene dos tipos de cambio; debe haber *a* piezas del primero para dar un corona, y *b* piezas del segundo para dar la misma suma. Una persona quiere tener *c* piezas para una corona, y requerimos saber cuántas piezas de cada tipo debe darle el banquero.

Supongamos que el banquero da *x* piezas del primer tipo; entonces es evidente que dará $c-x$ piezas del otro tipo. Ahora, las *x* piezas del primer tipo valen $\frac{x}{a}$ corona por la proporción $a:1=x:\frac{x}{a}$, y $c-x$ piezas del segundo tipo valen $\frac{c-x}{a}$ corona por la

proporción $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$. Así que $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1,$ o $\frac{bx}{a}+c-x=b,$ o $bx+ac-ax=ab,$ o mejor $bx-ax=ab-ac$, de donde tenemos que $x=\frac{ab-ac}{b-a}$, o $x=\frac{a(b-c)}{b-a}$. Consecuentemente $c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}$.

Respuesta. El banquero dará $\frac{a(b-c)}{b-a}$ piezas del primer tipo y $\frac{b(c-a)}{b-a}$ piezas del segundo tipo.

Observación. Estos dos números pueden encontrarse fácilmente por la regla de tres cuando requerimos aplicar los resultados que hemos obtenido. Para encontrar el primero decimos que $b-a:b-c=a:\frac{a(b-c)}{b-a}$, y para el segundo decimos que $b-a:c-a=b\frac{b(c-a)}{b-a}$. También debemos observar que *a* es menor que *b* y que *c* también es menor que *b* pero al mismo tiempo mayor que *a*, como lo requiere la naturaleza de la cuestión.

521. *Cuestión XX*. Un banquero tiene dos tipos de cambio; 10 piezas de uno hacen una corona y 20 piezas del otro hacen una corona. Una persona desea cambiar una corona en 17 piezas de dinero; ¿cuántas de cada tipo debe tener?

Aquí tenemos que $a=10, b=20,$ y $c=17$, lo que nos permite hacer las siguientes proporciones:

I. $10:3=10:3,$ así que el número de piezas del primer tipo es 3.

II. $10:7=20:14,$ así que hay 14 piezas del segundo tipo.

522. *Cuestión XXI*. A su muerte, un padre deja varios niños que se reparten su propiedad de la siguiente manera: el primero recibe cien coronas y la décima parte de lo que queda; el segundo recibe doscientas coronas y la décima parte de lo que queda; el tercero recibe trescientas coronas y la décima parte de lo que queda; el cuarto recibe cuatrocientas coronas y la décima parte de lo que queda, y así sucesivamente. Al final se descubre que la propiedad ha sido dividida de igual forma entre todos los niños, y se requiere saber en cuánto consistió, cuántos niños hubo, y cuánto recibió cada cual.

Esta cuestión tiene una naturaleza más bien singular, y por tanto requiere una atención particular. Para resolverla más fácilmente, supondremos que toda la fortuna es $= z$ coronas, y ya que todos los niños reciben la misma suma, sea $= x$ la parte de cada cual, por cuyo medio expresamos el número de niños con $\frac{z}{x}$. Habiendo establecido esto, podemos pasar a la solución de la cuestión, que será como sigue:

Suma o propiedad a ser dividida	Orden de los niños	Parte o porción de cada cual	Diferencias
z	Primero	$x = 100 + \frac{z-100}{10}$	
$z - x$	Segundo	$x = 200 + \frac{z-x-200}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 2x$	Tercero	$x = 300 + \frac{z-2x-300}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 3x$	Cuarto	$x = 400 + \frac{z-3x-400}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 4x$	Quinto	$x = 500 + \frac{z-4x-500}{10}$	$100 - \frac{x-100}{10} = 0$
$z - 5x$	Sexto	$x = 600 + \frac{z-5x-600}{10}$	Etcétera.

En la última columna hemos insertado las diferencias que obtenemos al sustraer cada porción [o parte] de la que le sigue. Ahora, siendo iguales todas estas porciones, cada una de las diferencias debe ser $= 0$. Y como sucede que todas estas diferencias son expresadas exactamente del mismo modo, será suficiente con hacer que una de ellas sea igual a nada, y tendremos la ecuación $100 - \frac{x-100}{10} = 0$. Multiplicando por 10 tenemos $1000 - x - 100 = 0,$ o $900 - x = 0$, y consecuentemente $x = 900$.

Ahora sabemos, entonces, que la parte de cada niño fue 900 coronas, así que tomando cualquiera de las ecuaciones de la tercera columna, la primera, por ejemplo, se vuelve, al sustituir el valor de *x*, $900 = 100 + \frac{z-100}{10},$ de donde inmediatamente obtenemos

el valor de z, porque $9000 = 1000 + z - 100$, o $9000 = 900 + z$, y por tanto $z = 8100$ y consecuentemente $\frac{z}{x} = 9$.

Respuesta. El número de niños es $= 9$, la fortuna dejada por el padre es $= 8100$ coronas, y la parte de cada niño es $= 900$ coronas.

CAPÍTULO IV

DE LA RESOLUCIÓN DE DOS O MÁS ECUACIONES DE PRIMER GRADO

523. A menudo sucede que nos vemos obligados a introducir, en cálculos algebraicos, dos o más cantidades desconocidas representadas por las letras x, y, z; y si la cuestión está determinada somos llevados al mismo número de ecuaciones como haya cantidades desconocidas, de donde entonces se requiere deducir tales cantidades. Como en este momento sólo consideraremos ecuaciones que no contienen potencias de una cantidad desconocida más grandes que la primera [potencia], ni tampoco productos de dos o más cantidades desconocidas, es claro que nuestras ecuaciones tendrán la forma $az + by + cx = d$.

524. Comenzando, pues, con dos ecuaciones, nos esforzaremos en encontrar, de ellas, los valores de x y y. En aras de que podamos considerar este caso de una manera general, sean las dos ecuaciones I. $ax + by = c$ y II. $fx + gy = h$, en donde a, b, c y f, g, h son números conocidos. Se requiere por tanto obtener, de estas dos ecuaciones, las dos cantidades desconocidas x y y.

525. El método más natural de proceder se presentará enseguida en la mente, y es determinar, de ambas ecuaciones, el valor de una de las cantidades desconocidas, x por ejemplo, y considerar la igualdad de tales dos valores, porque así tendremos una ecuación en donde la cantidad desconocida y se encontrará por sí misma, y puede ser determinada por las reglas que ya hemos establecido. Conociendo y, sólo tenemos que sustituir su valor en una de las cantidades que expresa x.

526. De acuerdo con esta regla, de la primera ecuación obtenemos $x = \frac{c - by}{a}$, y de la segunda $x = \frac{h - gy}{f}$. Haciendo estos dos valores iguales entre sí, tenemos la nueva ecuación $\frac{c - by}{a} = \frac{h - gy}{f}$; multiplicando por a el producto es $c - by = \frac{ah - agy}{f}$, y multiplicando por f el producto es $fc - fby = ah - agy$. Añadiendo agy tenemos $fc - fby + agy = ah$, y sustrayendo fc nos queda $-fby + agy = ah - fc$, o $(ag - bf)y = ah - fc$. Por último, al dividir entre $ag - bf$ tenemos que $y = \frac{ah - fc}{ag - bf}$.

Para ahora sustituir este valor de y en uno de los dos valores de x que hemos encontrado, como en el primero, donde $x = \frac{c - by}{a}$, primero tendremos que $-by = -\frac{abh - bcf}{ag - bf}$; por tanto $c - by = c - \frac{abh - bcf}{ag - bf}$, o $c - by = \frac{acg - bcf - abh + bcf}{ag - bf} = \frac{acg - abh}{ag - bf}$, y dividiendo entre a tenemos que $x = \frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf}$.

527. *Cuestión I*. Para ilustrar este método con ejemplos, propongamos encontrar dos números cuya suma sea $= 15$ y diferencia $= 7$. Llamemos x al número mayor y y al menor. Tendremos que I. $x + y = 15$ y II. $x - y = 7$. La primera ecuación da $x = 15 - y$ y la segunda $x = 7 + y$, de donde resulta la nueva ecuación $15 - y = 7 + y$. Así que $15 = 7 + 2y, 2y = 8,$ y $y = 4$, por cuyo medio encontramos que $x = 11$.

Respuesta. El número menor es 4 y el mayor es 11.

528. *Cuestión II*. También podemos generalizar la cuestión anterior al requerir dos números cuya suma sea $= a$ y la diferencia $= b$. Sea el mayor de los dos $= x$ y el menor $= y$. Tendremos que I. $x + y = a$ y II. $x - y = b$, y que la primera ecuación da $x = a - y$ y la segunda $x = y + b$.

Por lo tanto $a-y=b+y; a=b+2y; 2y=a-b$, y por último $y=\frac{a-b}{2}$. Consecuentemente $x=a-y=a-\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$.

Respuesta. El número mayor, o *x*, es $=\frac{a+b}{2}$ y el menor, o *y*, es $=\frac{a-b}{2}$, o lo que viene a ser lo mismo, $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$ y $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, y de aquí derivamos el siguiente teorema. *Cuando la suma de cualesquiera dos números es a y su diferencia es b, el mayor de los dos números será igual a la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y el menor de los dos números será igual a la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia*.

529. También podemos resolver la misma cuestión de la siguiente manera. Ya que las dos ecuaciones son $x+y=a$ y $x-y=b$, añadiendo una a la otra tenemos $2x=a+b$, y por lo tanto $x=\frac{a+b}{2}$. Por último, sustrayendo la misma ecuación de la otra tenemos $2y=a-b$, y por lo tanto $y=\frac{a-b}{2}$.

530. *Cuestión III*. Una mula y un asno llevaban cargas que ascendían a algunos centenares de pesos. El asno se quejó del suyo, y le dijo a la mula: "sólo necesito un centenar del peso de tu carga para hacer que la mía sea tan pesada como la tuya". La mula respondió: "Sí, pero si tú me dieses un centenar de tu peso, yo cargaría tres veces tanto como tú lo harías." ¿Cuántos centenares de pesos cargaban cada cual?

Supongamos que la carga de la mula son *x* centenares de peso y la de la mula son *y* centenares de peso. Si la mula le da un centenar de su peso al asno, uno tendrá $y+1$ y para el otro quedará $x-1$, y como, en este caso, el asno carga tres veces tanto como la mula, tenemos que $y+1=2x-2$.

Además, si el asno le da un centenar de pesos a la mula, esta última tendrá $x+1$ y el asno se queda con $y-1$; pero ahora siendo la carga del primero tres veces tanto como la de la última, tenemos que $x+1=3y-3$. Consecuentemente, nuestras dos ecuaciones serán I. $y+1=2x-2$ y II. $x+1=3y-3$. La primera da $x=\frac{y+3}{2}$ y la segunda $x=3y-4$, de

donde tenemos la nueva ecuación $\frac{y+3}{2}=3y-4$, que da $y=\frac{11}{5}$ y que también determina el valor de *x*, que se vuelve $2\frac{3}{5}$.

Respuesta. La mula cargaba $2\frac{3}{5}$ centenares de pesos y el asno $2\frac{1}{5}$.

531. Cuando hay tres números desconocidos y tantas ecuaciones [como números desconocidos], como por ejemplo I. $x+y-z=8$, II. $x+z-y=9$, III. $y+z-x=10$, comenzamos, como antes, por deducir un valor de *x* para cada cual, y entonces para I. tenemos $x=8+z-y$, para II. $x=9+y-z$, y para III. $x=y+z-10$.

Comparando el primero de estos valores con el segundo, y después de eso también con el tercero, tenemos las siguientes ecuaciones: I. $8+z-y=9+y-z$; II. $8+z-y=y+z-10$. Ahora, la primera da $2z-2y=1$ y la segunda $2y=18$ o $y=9$; entonces, si sustituimos este valor de *y* en $2z-2y=1$, tenemos que $2z-18=1$ o que $2z=19$, así que $z=9\frac{1}{2}$. Por lo tanto queda por determinar *x*, que fácilmente se encuentra que es $=8\frac{1}{2}$.

Aquí sucede que la letra *z* desaparece en la última ecuación y que encontramos el valor de *y* de manera inmediata. Si éste no hubiese sido el caso, habríamos tenido dos ecuaciones entre *z* y *y* a ser resueltas por la regla anterior.

532. Supongamos haber encontrado las siguientes tres ecuaciones: I. $3x+5y-4z=25$, II. $5x-2y+3z=46$, y III. $3y+5z-x=62$. Si de cada una deducimos el valor de *x*, tendremos que I. $x=\frac{25-5y+4z}{3}$, II. $x=\frac{46+2y-3z}{5}$, y III. $x=3y+5z-62$. Comparando estos tres valores juntos, y primero el tercero con el primero, tenemos que $3y+5z-62=\frac{25-5y+4z}{3}$; multiplicando por 3 tenemos que $9y+15z-186=25-5y+4z$, así que $9y+15z=211-5y+4z$, y $14y+11z=211$.

Comparando el tercero con el segundo tenemos que $3y+5z-62=\frac{46+2y-3z}{5}$ o que $46+2y-3z=15+25z-310$, que reducido es $356=13y+28z$. Ahora deduciremos el

valor de y de estas dos ecuaciones: I. $211 = 14 + 11z$, y por tanto $14y = 211 - 11z$ y $y = \frac{211 - 11z}{14}$; II. $356 = 13y + 28z$, y por tanto $13y = 356 - 28z$ y $y = \frac{356 - 28z}{13}$. Estos dos valores forman la nueva ecuación $\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13}$, que se vuelve $2743 - 143z = 4984 - 392z$ o $249z = 2241$, y por lo tanto $z = 9$.

Sustituyendo este valor en una de las dos ecuaciones de y y z encontramos que $y = 8$ y que una sustitución similar en uno de los tres valores de x dará $x = 7$.

533. Si hubiese más de tres cantidades desconocidas a ser determinadas y tantas ecuaciones a ser resueltas, habríamos procedido de igual forma, aunque los cálculos podrían llegar a ser muy tediosos. Es apropiado señalar, entonces, que en cada caso particular pueden descubrirse medios que faciliten enormemente su resolución. Estos medios consisten en introducir en el cálculo, además de las principales cantidades desconocidas, una nueva cantidad desconocida asumida arbitrariamente como, por ejemplo, la suma de todo el resto; y cuando una persona tiene por lo menos un poco de práctica en tales cálculos fácilmente percibe qué es lo que resulta más apropiado hacer. Los siguientes ejemplos podrán servir para facilitar la aplicación de estos artificios.

534. *Cuestión IV*. Tres personas juegan [una partida de póquer].[10] En el primer juego, la primera pierde con cada una de las otras dos tanto dinero como cada una tiene. En el siguiente, la segunda persona pierde con cada una de las otras dos tanto dinero como el que ya tienen. Por último y en el tercer juego, la primera y la segunda persona ganan cada una, de la tercera persona, tanto dinero como el que tenían antes. Cuando terminan, descubren que todos tienen una suma igual, a saber, 24 Luises cada quien. Se requiere saber con cuánto dinero empezó a jugar cada cual.

Supongamos que la apuesta de la primera persona fue de x Luises, la de la segunda de y Luises, y la de la tercera de z Luises. Además, hagamos que la suma de todas las apuestas, o $x + y + z$, sea $= s$. Ahora, la primera persona perdiendo en el primer juego tanto dinero como tienen las otras dos, pierde $s - x$ (porque él mismo habiendo tenido x,

[10] Euler no dice a qué juegan estas tres personas, pero para efectos imaginativos podemos suponer que juegan póquer, y esto no cambia en nada los argumentos matemáticos del ejemplo. Nota del Traductor.

los otros dos tendrían que haber tenido $s-x$). Por lo tanto a la primera persona le quedará $2x-s$, a la segunda $2y$, y a la tercera $2z$.

Así que, después del primer juego, cada uno tendrá I. $2x-s$, II. $2y$, y III. $2z$. En el segundo juego la segunda persona, que ahora tiene $2y$, pierde tanto dinero como tienen los otros dos, esto es, $s-2y$, de tal forma que ha dejado $4y-s$. Con respecto a los otros, cada uno habrá duplicado lo que tenían, así que después del segundo juego las tres personas tendrán I. $4x-2s$, II. $4y-s$, y III. $4z$.

En el tercer juego la tercera persona, que ahora tiene $4z$, es el perdedor, y con la primera pierde $4x-2s$ y con la segunda $4y-s$; consecuentemente las tres personas tendrán I. $8x-4s$, II. $8y-2s$, y III. $8z-s$. Ahora bien, cada una teniendo al final del juego 24 Luises, tenemos tres ecuaciones la primera de las cuales inmediatamente da *x*, la segunda *y*, y la tercera *z*; además, se sabe que *s* es $=72$, ya que las tres personas tienen en total 72 Luises al final del último juego (aunque no es necesario atender a esta circunstancia primero). Tenemos entonces que

I. $8x-4s=24$ o $8x=24+4s$ o $x=3+\frac{1}{2}s$;

II. $8y-2s=24$ o $8y=24+2s$ o $y=3+\frac{1}{4}s$;

III. $8z-s=24$ o $8z=24+z$ o $z=3+\frac{1}{8}s$.

Añadiendo estos tres valores tenemos $x+y+z=9+\frac{7}{8}s$. Así que, ya que $x+y+z=s$, tenemos que $s=9+\frac{7}{8}s$, y por tanto $\frac{1}{8}s=9$ y $s=72$. Si ahora sustituimos este valor de *s* en las expresiones que hemos encontrado para *x*, *y*, y *z*, descubriremos que, antes de que [las tres personas] empezaran a jugar, la primera tenía 39 Luises, la segunda 21, y la tercera 12. Esta solución muestra que por medio de una expresión para la suma de las tres cantidades desconocidas podemos sobrepasar las dificultades que tienen lugar en el método ordinario.

535. Aunque la cuestión anterior parece ser difícil en principio, puede ser resuelta incluso sin álgebra, y para esto sólo tenemos que intentar resolverla inversamente. Como

los tres jugadores, una vez acabado el juego, tenían cada uno 24 Luises, y en el tercer juego el primero y el segundo duplicaban su dinero, antes de este último juego tuvieron que haber tenido I. 12, II. 12, y III. 48. En el segundo juego el primero y el tercero duplicaban su dinero, así que antes de tal juego tuvieron I. 6, II. 42, y III. 24. Por último, en el primer juego el segundo y el tercero ganaron tanto dinero como con el que habían comenzado, así que I. 39, II. 21, y III. 12. Éste es el mismo resultado que obtuvimos con la primera solución.

536. *Cuestión V*. Dos personas deben 29 pistoles, y aunque las dos tienen dinero, ninguna de ellas se puede permitir pagar la deuda común. Entonces el primer deudor le dice al segundo: "si me dieses $\frac{2}{3}$ de tu dinero, yo podría pagar la deuda", y el segundo le responde que él también podría pagar la deuda si el primero le diese $\frac{3}{4}$ de su dinero. Requerimos saber cuántos pistoles tenía cada uno.

Supongamos que el primero tiene x pistoles y el segundo y pistoles. Primero tenemos que $x+\frac{2}{3}y=29$ y que $y=\frac{3}{4}x=29$. La primera ecuación da $x=29-\frac{2}{3}y$ y la segunda $x=\frac{116-4y}{3}$, así que $29-\frac{2}{3}y=\frac{116-4y}{3}$. De esta ecuación obtenemos $y=14\frac{1}{2}$, y por lo tanto que $x=19\frac{1}{3}$.

Respuesta. El primer deudor tenía $19\frac{1}{3}$ pistoles y el segundo $14\frac{1}{2}$ pistoles.

537. *Cuestión VI*. Tres hermanos compraron un viñedo por cien Luises. El menor dice que podría haberlo pagado solo si el segundo le hubiese dado la mitad del dinero que tenía; el segundo dice que si el mayor le hubiese dado únicamente la tercera parte de su dinero, él podría haber pagado solo el viñedo, y el mayor sólo pide que le hubiesen dado una cuarta parte del dinero del menor para así haber pagado el viñedo. ¿Cuánto dinero tenía cada quien?

Supongamos que el primero tenía x Luises, el segundo y Luises, y el tercero z Luises. Entonces tendremos las siguientes tres ecuaciones: I. $x+\frac{1}{2}y=100$; II.

$y+\frac{1}{3}z=100$, y III. $z+\frac{1}{4}x=100$, y sólo dos de las cuales dan el valor de *x*, a saber, la primera $x=100-\frac{1}{2}y$ y la tercera $x=400-4z$. De esta forma tenemos la ecuación $100-\frac{1}{2}y=400-4z$, o $4z-\frac{1}{2}y=300$, que debemos combinar con la segunda para determinar *y* y *z*. Ahora, como la segunda ecuación fue $y+\frac{1}{3}z=100$, de ella deducimos que $y=100-\frac{1}{3}z$, y siendo la última ecuación encontrada $4z-\frac{1}{2}y=300$, tenemos que $y=8z-600$. Consecuentemente la ecuación final es $100-\frac{1}{3}z=8z-600$, y entonces $8\frac{1}{3}z=700$, o $\frac{25}{3}z=700$ y $z=84$. Por lo tanto $y=100-28=72$ y $x=64$.

Respuesta. El menor tenía 64 Luises, el segundo 72, y el mayor 84.

538. Ya que en este ejemplo cada ecuación contiene sólo dos cantidades desconocidas, podemos obtener la solución requerida de una manera más fácil. La primera ecuación da $y=200-2x$, así que *y* está determinado por *x*, y si sustituimos este valor en la segunda ecuación tenemos $200-2x+\frac{1}{3}x=100$, y por tanto $\frac{1}{3}z=2x-100$ y $z=6x-300$. Así pues, *z* también está determinado por *x*, y si introducimos este valor en la tercera ecuación obtenemos $6x-300+\frac{1}{4}x=100$, en donde *x* está sola y que, cuando la reducimos a $25x-1600=0$, da $x=64$. Consecuentemente $y=200-128=72$ y $z=384-300=84$.

539. Podemos recurrir al mismo método si tenemos un mayor número de ecuaciones. Supongamos, por ejemplo, que de manera general tenemos: I. $u+\frac{x}{a}=n$; II. $x+\frac{y}{b}=n$; III. $y+\frac{z}{c}=n$, y IV. $z+\frac{u}{d}=n$, o, reduciendo las fracciones, I. $au+x=an$; II. $bx+y=bn$; III. $cy+z=cn$, y IV. $dz+u=dn$.

Aquí, la primera ecuación inmediatamente da $x=an-au$, y sustituyendo este valor en la segunda tenemos $abn-abu+y=bn$, de tal forma que $y=bn-abn+abu$. La sustitución de este valor en la tercera ecuación da $bcn-abcn+abcu+z=cn$, y entonces

$z = cn - bcn + abcn - abcu$, y sustituyendo esto en la cuarta ecuación tenemos que $cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn$, así que $dn - cdn + bcdn - abcdn = -abcdu + u$, o $(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$; por lo tanto tenemos que $u = \dfrac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n\dfrac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$.

Como consecuencia de todo lo anterior,

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \times \frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}.$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \times \frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}.$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \times \frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}.$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \times \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}.$$

540. *Cuestión VII*. Un capitán tiene tres compañías, una de suizos, otra de suevos, y otra tercera de sajones. Quiere hacer un asalto con parte de estas tropas y promete una recompensa de 901 coronas bajo la siguiente condición: que cada soldado de la compañía que asalta recibe una corona y que el resto del dinero se distribuye igualmente entre las otras dos compañías.

Siendo esto así, se descubre que si los suizos hacen el asalto, cada soldado de las otras compañías recibe media corona; que si son los suevos los que asaltan, cada soldado de las otras compañías recibe $\frac{1}{3}$ de una corona, y que si los sajones hacen el asalto, cada soldado de las otras compañías recibe $\frac{1}{4}$ de una corona. Requerimos el número de hombres en cada compañía.

Supongamos que el número de suizos es $= x$, el de los suevos $= y$, y el de los sajones $= z$. Y también hagamos que $x + y + z = s$, porque de esta forma reducimos el cálculo considerablemente. Si, por tanto, son los suizos los que hacen el asalto, y siendo x su número, el de los otros será $s - x$. Ahora, los primeros reciben 1 corona y los últimos media corona, así que tenemos $x + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}x = 901$. Del mismo modo, si son los suevos los

que llevan a cabo el asalto tenemos que $y+\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}y=901$. Por último, si son los sajones tenemos que $z+\frac{1}{4}s-\frac{1}{4}z=901$. Cada una de estas tres ecuaciones nos permitirá determinar una de las cantidades desconocidas *x*, *y*, *z*, porque la primera nos da $x=1802-s$, la segunda $2y=2703-s$, y la tercera $3z=3604-s$.

Si ahora tomamos los valores de $6x$, $6y$, y $6z$ y los escribimos uno encima del otro tenemos que $6x=10812-6s;6y=8109-3s;6z=7208-2s$, y, por adición, $6s=26129-11s$ o $17s=26129$, así que $s=1537$, y éste es el número total de soldados, por medio de lo cual encontramos que $x=1802-1537=265$; $2y=2703-1537=1166$ o $y=583$, y $3z=3604-1537=2067$ o $z=689$.

Respuesta. La compañía de suizos consiste en 265 hombres, la de suevos en 583, y la de sajones en 689.

CAPÍTULO V

DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS PURAS

541. *Se dice que una ecuación es de segundo grado cuando contiene el cuadrado o la segunda potencia de la cantidad desconocida sin ninguna de sus potencias altas*. Una ecuación que contiene la tercera potencia de la cantidad desconocida pertenece a las ecuaciones cúbicas, y su resolución requiere de reglas particulares. Hay, por lo tanto, únicamente tres tipos de términos en una ecuación de segundo grado:

1. Los términos en los cuales no se encuentra la cantidad desconocida en absoluto, o que están compuestos únicamente de números conocidos.

2. Los términos en los cuales encontramos únicamente la primera potencia de la cantidad desconocida.

3. Los términos que contienen al cuadrado o a la segunda potencia de la cantidad desconocida.

Así pues, *x* significando una cantidad desconocida, y las letras *a*, *b*, *c*, *d*, etc., representando números conocidos, los términos del primer tipo tendrán la forma *a*, los del segundo tipo la forma *bx*, y los del tercer tipo la forma *cxx*.

542. Ya hemos visto cómo pueden unirse dos o más términos del mismo tipo y ser considerados como un solo término. Por ejemplo, podemos considerar la fórmula $axx - bxx + cxx$ como un solo término representado por $(a - b + c)xx$, ya que, en efecto, $(a - b + c)$ es una cantidad conocida.

Y también hemos visto cómo, cuando tales términos se encuentran en ambos lados del signo =, podemos llevarlos a un lado y después reducirlos a un solo término. Tomemos, por ejemplo, la ecuación $2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$. Primero sustraemos $2xx$ y nos queda $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$; después, añadiendo $8x$, obtenemos $5x + 4 = 3xx + 11$, y por último, sustrayendo 11, nos queda $3xx = 5x - 7$.

543. También podemos llevar todos los términos a un lado del signo = para así dejar únicamente 0 en el otro. Aquí debemos recordar que, cuando los términos son transpuestos de un lado a otro, sus signos deben ser cambiados. Así, la ecuación de arriba asumirá la forma $3xx - 5x + 7 = 0$, y es por esta razón que *la siguiente fórmula general representa todas las ecuaciones de segundo grado*: $axx \pm bx \pm c = 0$, en donde el signo $\pm$ se lee como *más* o *menos*, e indica que tales términos a veces pueden ser positivos y a veces negativos.

544. Sea cual sea la forma original de una ecuación cuadrática, siempre puede reducirse a esta fórmula de tres términos. Si tenemos, por ejemplo, la ecuación $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$, primero debemos reducir las fracciones. Multiplicando, para este propósito, por $cx + d$, tenemos $ax + b = \frac{cexx + cfx + edx + fd}{gx + h}$; después por $gx + h$ tenemos $agxx + bgx + ahx + bh = cexx + cfx + edx + fd$, que es una ecuación de segundo grado y reducible a los tres siguientes términos, que vamos a transponer arreglándolos de la manera habitual:

$$\begin{aligned} 0 &= agxx + bgx + bh, \\ &- cexx + ahx - fd, \\ &- cfx \\ &- edx. \end{aligned}$$

También podemos mostrar esta ecuación de la siguiente manera, que es todavía más clara: $0 = (ag - ce)xx + (bg + ah - cf - ed)x + bh - fd$.

545. A las ecuaciones de segundo grado en donde se encuentran todos los tres tipos de términos se les llama *completas*, y su resolución supone grandes dificultades. Es por esta razón que primero consideraremos aquellas en donde falta uno de los términos. Ahora, si el término *xx* no se encontrase en la ecuación, ésta no sería cuadrática, sino que pertenecería a aquel tipo que ya consideramos. *Si faltase el término que contiene sólo números conocidos, la ecuación tendría la forma* $axx \pm bx = 0$ *que, siendo divisible entre x, puede reducirse a* $ax \pm b = 0$*, y que es del mismo modo una ecuación simple y por tanto no pertenece a la clase presente*.

546. *Pero cuando falta el término de en medio, el término que contiene la primera potencia de x, la ecuación asume la forma* $axx \pm c = 0$ *o* $axx = \pm c$, ya que el signo de *c* puede ser positivo o negativo. A una ecuación así la llamaremos una ecuación de segundo grado *pura*, debido a que su resolución no supone dificultad alguna, ya que *sólo tenemos que dividir entre a, lo que da* $xx = \frac{c}{a}$*, y tomando la raíz cuadrada de ambos lados tenemos que* $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$*, por medio de lo cual resolvemos la ecuación*.

547. Pero aquí tendremos que considerar tres casos. En el primero, *cuando* $\frac{c}{a}$ *es un número cuadrado (del cual podemos, por tanto, asignar realmente la raíz), para el valor de x obtenemos un número racional que puede ser entero o fraccional*. Por ejemplo, la ecuación $xx = 144$ da $x = 12$, y $xx = \frac{9}{16}$ da $x = \frac{3}{4}$.

La segunda variedad es *cuando* $\frac{c}{a}$ *no es un cuadrado, en cuyo caso debemos contentarnos con el signo* √. Si, por ejemplo, $xx = 12$, tenemos que $x = \sqrt{12}$, cuyo valor puede ser determinado por aproximación, como ya hemos visto.

El tercer caso es en el que $\frac{c}{a}$ *se vuelve un número negativo. Entonces el valor de x es del todo imposible e imaginario, y este resultado prueba que la cuestión que conduce a tal ecuación es por sí misma imposible*.

548. Antes de seguir debemos observar que, siempre que se requiera extraer la raíz cuadrada de un número, tal raíz, como ya vimos, siempre tiene dos valores, uno positivo y

otro negativo. *Supongamos tener la ecuación* $xx = 49$*; entonces el valor de x no sólo será* $+7$*, sino también* -7*, lo que expresamos por* $x = \pm 7$. Así que todas estas ecuaciones admiten una doble respuesta, pero fácilmente se percibirá que en muchos casos, como en aquellos, por ejemplo, que tienen que ver con un cierto número de hombres, el valor negativo no puede existir.

549. También en ecuaciones del tipo $axx = bx$, i. e., en donde falta la cantidad conocida *c*, puede haber dos valores de *x*, aunque sólo tenemos uno si es que dividimos entre *x*. En la ecuación $xx = 3x$, por ejemplo, en donde se requiere asignar un valor de *x* tal que *xx* pueda volverse igual a $3x$, suponemos que $x = 3$, un valor que encontramos al dividir la ecuación entre *x*. Pero además de este valor también hay otro que es igualmente satisfactorio, a saber, $x = 0$, porque entonces $xx = 0$ y $3x = 0$. *Por lo tanto, las ecuaciones de segundo grado admiten, en general, dos soluciones, mientras que las ecuaciones simples admiten solamente una*.

Ahora ilustraremos, a partir de algunos ejemplos, lo que hemos dicho con respecto a las ecuaciones puras de segundo grado.

550. *Cuestión I*. Se requiere un número cuya mitad multiplicada por su tercera parte dé 24. Sea este número $= x$. Entonces $\frac{1}{2}x$ multiplicado por $\frac{1}{3}x$ debe dar 24, y por tanto tenemos la ecuación $\frac{1}{6}xx = 24$. Multiplicando por 6 tenemos $xx = 144$, y la extracción de la raíz da $x = \pm 12$. Hemos puesto $\pm$ porque si $x = +12$, entonces $\frac{1}{2}x = 6$ y $\frac{1}{3}x = 4$, y el producto de estos dos números es 24; y si $x = -12$, entonces $\frac{1}{2}x = -6$ y $\frac{1}{3}x = -4$, cuyo producto es igualmente 24.

551. *Cuestión II*. Se requiere un número tal que, al añadirle 5 y al sustraerle 5, el producto de la suma por la diferencia sea 96. Sea *x* este número; entonces $x + 5$ multiplicado por $x - 5$ debe dar 96, de donde resulta la ecuación $xx - 25 = 96$. Añadiendo 25 tenemos que $xx = 121$, y extrayendo la raíz tenemos que $x = 11$. De esta forma, $x + 5 = 16$, y también $x - 5 = 6$, y por último $6 \times 16 = 96$.

552. *Cuestión III*. Se requiere un número tal que, al añadirle 10 y al sustraerle 10, la suma multiplicada por la diferencia dé 51. Sea *x* este número; $10 + x$ multiplicado por

$10-x$ debe dar 51, así que $100-xx=51$. Añadiendo xx y sustrayendo 51 tenemos que $xx=49$, cuya raíz cuadrada da $x=7$.

553. *Cuestión IV*. Tres personas terminan de jugar [una partida de póquer]. La primera acaba con tantas veces 7 coronas como la segunda tiene tres coronas, y la segunda con tantas veces 17 coronas como la tercera tiene 5 coronas. Además, si multiplicamos el dinero de la primera por el dinero de la segunda, y el dinero de la segunda por el dinero de la tercera, y por último, el dinero de la tercera por el de la primera, la suma de estos tres productos será $3830\frac{2}{3}$. ¿Cuánto dinero tiene cada cual?

Supongamos que el primer jugador tiene *x* coronas, y como tiene tantas veces 7 coronas como el segundo tiene 3 coronas, sabemos que su dinero es al del segundo en la razón de $7:3$. Por lo tanto haremos que $7:3=x$ al dinero del segundo jugador, que por consiguiente es $\frac{3}{7}x$. Además, como el dinero del segundo jugador es al del tercero en la razón de $17:5$, diremos que $17:5=\frac{3}{7}x$ al dinero del tercer jugador, o a $\frac{15}{119}x$.

Multiplicando *x*, o el dinero del primer jugador, por $\frac{3}{7}x$, el dinero del segundo, tenemos el producto $\frac{3}{7}xx$. Entonces $\frac{3}{7}x$, el dinero del segundo jugador, multiplicado por el dinero del tercero, o por $\frac{15}{119}x$, da $\frac{45}{833}xx$. Por último, el dinero del tercero, o $\frac{15}{119}x$, multiplicado por *x*, o por el dinero del primero, da $\frac{15}{119}xx$. La suma de estos tres productos es $\frac{3}{7}xx+\frac{45}{833}xx+\frac{15}{119}xx$, y reduciendo estas fracciones al mismo denominador encontramos que su suma es $\frac{507}{833}xx$, que debe ser igual al número $3830\frac{2}{3}$. Tenemos, por tanto, que $\frac{507}{833}xx=3830\frac{2}{3}$.

Así que $\frac{1521}{833}xx = 11492$, y $1521xx$ siendo igual a 9572836, al dividir entre 1521 tenemos que $xx = \frac{9572836}{1521}$, y tomando su raíz encontramos que $x = \frac{3094}{39}$. Esta fracción es reducible a términos inferiores si la dividimos entre 13, así que $x = \frac{238}{3} = 79\frac{1}{3}$, y por lo tanto concluimos que que $\frac{3}{7}x = 34$ y que $\frac{15}{119}x = 10$.

Respuesta. El primer jugador tiene $79\frac{1}{3}$ coronas, el segundo 34, y el tercero 10.

Observación. Este cálculo puede llevarse a cabo de una forma más fácil, a saber, al tomar los factores de los números que se presentan y al atender los cuadrados de tales factores. Es evidente que $507 = 3 \times 169$ y que 169 es el cuadrado de 13, y también lo es que $833 = 7 \times 119$ y que $119 = 7 \times 17$. Ahora bien, tenemos que $\frac{3 \times 169}{17 \times 49}xx = 3830\frac{2}{3}$, y si multiplicamos esto por 3 tenemos $\frac{9 \times 169}{17 \times 49}xx = 11492$. Ahora resolvamos este número también en sus factores. Inmediatamente percibimos que el primero es 4, esto es, que $11492 = 4 \times 2873$, y además que 2873 es divisible entre 17, así que $2873 = 17 \times 169$. Como consecuencia de esto, nuestra ecuación asumirá la forma $\frac{9 \times 169}{17 \times 49}xx = 4 \times 17 \times 169$, que dividida entre 169 se reduce a $\frac{9}{17 \times 49}xx = 4 \times 17$. Multiplicando por 17×49 y dividiendo entre 9 tenemos que $xx = \frac{4 \times 289 \times 49}{9}$, una ecuación en la que todos los factores son cuadrados. Por consiguiente tenemos, sin ningún cálculo más, la raíz $x = \frac{2 \times 17 \times 7}{3} = 79\frac{1}{3}$, justo como antes.

554. *Cuestión V*. Una compañía de comerciantes nombra un agente en Arcángel.[11] Cada uno de los comerciantes contribuye con el negocio que tienen en mente diez veces tantas coronas como hay socios. El beneficio del agente está fijado en el doble de lo que

[11] Arcángel es una ciudad situada al norte de Rusia. Nota del Traductor.

haya en coronas, *por ciento*, como haya socios. Además, si multiplicamos la $\frac{1}{100}$ parte de su ganancia total por $2\frac{2}{9}$ encontraremos el número de socios. ¿Cuál es tal número?

Sea $=x$, y ya que cada socio ha contribuido con $10x$, el capital total es $=10xx$. Ahora, por cada cien coronas el agente gana $2x$, así que con el capital de $10xx$ su ganancia será de $\frac{1}{5}x^3$. La centésima parte de esta ganancia es $\frac{1}{500}x^3$, y multiplicando por $2\frac{2}{9}$, o por $\frac{20}{9}$, tenemos $\frac{20}{4500}x^3$, o $\frac{1}{225}x^3$, y esto debe ser igual al número de socios, o a *x*.

Tenemos, entonces, la ecuación $\frac{1}{225}x^3 = x$ o $x^3 = 225x$, que a primera vista parece ser [una ecuación] de tercer grado; pero como podemos dividirla entre *x*, se reduce a la [ecuación] cuadrática $xx = 225$, de donde surge que $x = 15$.

Respuesta. Hay quince socios y cada uno contribuyó con 150 coronas.

CAPÍTULO VI

DE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MIXTAS DE SEGUNDO GRADO

555. Se dice que *una ecuación de segundo grado es mixta, o completa, cuando en ella se encuentran tres tipos de términos, a saber, aquel que contiene al cuadrado de la cantidad desconocida, como* axx*; aquel en el que se encuentra la cantidad desconocida sólo en la primera potencia, como* bx*, y por último, el tipo de términos compuestos únicamente de cantidades conocidas*. Y como podemos unir dos o más términos del mismo tipo en uno solo, y llevar todos los términos a un lado del signo =, la forma general de una ecuación mixta de segundo grado será $axx \pm bx \pm c = 0$.

En este capítulo mostraremos cómo se deriva el valor de *x* de estas ecuaciones. Se verá que hay dos métodos de obtenerlo.

556. Una ecuación del tipo que estamos considerando puede reducirse, por división, a una forma tal que el primer término pueda contener sólo al cuadrado *xx* de la cantidad desconocida *x*. Dejaremos al segundo término en el mismo lado con *x*, y transpondremos el término conocido al otro lado del signo =. Por estos medios, nuestra ecuación asumirá la

forma $xx \pm px \pm q$, en donde *p* y *q* representan cualesquiera números conocidos, positivos o negativos, y ahora todo se reduce a determinar el verdadero valor de *x*. Comenzaremos por remarcar que, si $xx + px$ fuese un cuadrado real, la resolución no supondría dificultad alguna, porque únicamente requeriríamos tomar la raíz cuadrada de ambos lados.

557. Pero es evidente que $xx + px$ no puede ser un cuadrado, porque ya hemos visto que *si una raíz consiste en dos términos, por ejemplo* $x + n$, *su cuadrado siempre contiene tres términos, a saber, dos veces el producto de las dos partes además del cuadrado de cada parte; esto es, el cuadrado de* $x + n$ *es* $xx + 2nx + nn$. Ahora, en un lado ya tenemos $xx + px$; *podemos,* por tanto, *considerar xx como el cuadrado de la primera parte de la raíz y, en este caso, px debe representar dos veces el producto de x, la primera parte de la raíz por la segunda parte. Consecuentemente, esta segunda parte debe ser* $\frac{1}{2}p$, *y en efecto el cuadrado de* $x + \frac{1}{2}p$ *resulta ser* $xx + px + \frac{1}{4}pp$.

558. *Ahora,* $xx + px + \frac{1}{4}pp$ *siendo un cuadrado real, que tiene* $x + \frac{1}{2}p$ *por su raíz, si reanudamos nuestra ecuación* $xx + px = q$, *sólo tenemos que añadir* $\frac{1}{4}pp$ *a ambos lados, lo que nos da* $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$, *el primer lado siendo en realidad un cuadrado y el otro conteniendo sólo cantidades conocidas. Si, por tanto, tomamos la raíz cuadrada de ambos lados, encontramos que* $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$, *y sustrayendo* $\frac{1}{2}p$ *obtenemos* $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$; *y como toda raíz cuadrada puede tomarse afirmativa o negativamente, para x tendremos dos valores expresados así:* $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$.

559. Esta fórmula contiene la regla por la cual pueden resolverse todas las ecuaciones cuadráticas, y será bueno conservarla en la memoria para que así no sea necesario repetir, cada vez, toda la operación que hemos realizado. Siempre podemos arreglar la ecuación de tal manera que el cuadrado puro *xx* pueda encontrarse en un lado y

que la ecuación de arriba tenga la forma $xx = -px + q$, donde inmediatamente vemos que $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$.

560. La regla general, pues, que deducimos de esto para resolver la ecuación $xx = -px + q$ se encuentra en la siguiente consideración: que la cantidad desconocida *x* es igual a la mitad del coeficiente o del multiplicador de *x* en el otro lado de la ecuación, *más* o *menos* la raíz cuadrada del cuadrado de este número y la cantidad conocida que forma el tercer término de la ecuación.

Así, si tuviésemos la ecuación $xx = 6x + 7$, inmediatamente diríamos que $x = 3 \pm \sqrt{9+7} = 3 \pm 4$, de donde tenemos los dos valores de *x*, I. $x = 7$ y II. $x = -1$. Del mismo modo, la ecuación $xx = 10x - 9$ nos daría $x = 5 \pm \sqrt{25-9} = 5 \pm 4$, esto es, los dos valores de *x* son 9 y 1.

561. Esta regla se comprenderá mejor si distinguimos los siguientes casos. I. cuando *p* es un número par; II. cuando *p* es un número non, y III. cuando *p* es un número fraccional.

I. Sea *p* un número par y una ecuación tal que $xx = 2px + q$. En este caso tendremos que $x = p \pm \sqrt{pp + q}$.

II. Sea *p* un número non y la ecuación $xx = px + q$. Aquí tendremos que $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$, y como $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp + 4q}{4}$, podemos extraer la raíz cuadrada del denominador y escribir $x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{pp+4q}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{pp+4q}}{2}$.

III. Por último, si *p* es una fracción, la ecuación puede resolverse de la siguiente manera. Sea $axx = bx + c$, o $xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}$, nuestra ecuación. Entonces tendremos, por regla, que $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}}$. Ahora, $\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb + 4ac}{4aa}$, cuyo denominador es un cuadrado, así que $x = \frac{b \pm \sqrt{bb + 4ac}}{2a}$.

562. El otro método de resolver ecuaciones cuadráticas mixtas consiste en transformarlas en ecuaciones puras. Esto se hace por sustitución; por ejemplo, en la ecuación $xx = px + q$, en lugar de la cantidad desconocida *x*, podemos escribir otra cantidad desconocida *y* tal que $x = y + \frac{1}{2}p$, por cuyo medio, una vez habiendo determinado *y*, inmediatamente encontramos el valor de *x*.

Si hacemos esta sustitución de $y + \frac{1}{2}p$ en lugar de *x*, tenemos $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ y $px = py + \frac{1}{2}pp$; consecuentemente, nuestra ecuación se volverá $yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q$, que primero es reducida, al sustraer *py*, a $yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$, y después, al sustraer $\frac{1}{4}pp$, a $yy = \frac{1}{4}pp + q$. Esta es una ecuación cuadrática pura, que inmediatamente da $y = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$. Ahora, ya que $x = y + \frac{1}{2}p$, tenemos que $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + q}$, justo como encontramos antes. Sólo nos queda, entonces, ilustrar esta regla con algunos ejemplos.

563. *Cuestión I*. Hay dos números; uno excede al otro por 6 y su producto es 91. ¿Cuáles son tales números? Si el menor es *x*, el otro es $x + 6$ y su producto es $xx + 6x = 91$. Sustrayendo $6x$ nos queda $xx = 91 - 6x$, y nuestra regla nos da $x = -3 \pm \sqrt{9 + 91} = -3 \pm 10$, así que $x = 7$ y $x = -13$.

Respuesta. La cuestión admite dos soluciones. Por una, el menor número *x* es $= 7$ y el mayor $x + 6 = 13$. Por la otra, el menor número $x = -13$ y el mayor $x + 6 = -7$.

564. *Cuestión II*. Encontrar un número tal que, si tomamos 9 de su cuadrado, el resto puede ser un número tantas unidades mayor que 100 como el número buscado es menor que 23. Sea el número buscado $= x$. Sabemos que $xx - 9$ excede a 100 por $xx - 109$, y como *x* es menor que 23 por $23 - x$, tenemos la ecuación $xx - 109 = 23 - x$. Por consiguiente, $xx = -x + 132$, y, por nuestra regla, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 132} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{529}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{23}{2}$. Así que $x = 11$ y $x = -12$.

Respuesta. Si sólo se requiere un número positivo, tal número será 11, cuyo cuadrado *menos* 9 es 112, y consecuentemente mayor que 100 por 12 del mismo modo que 11 es menor que 23 por 12.

565. *Cuestión III*. Encontrar un número tal que, si multiplicamos su mitad por su tercio, y al producto le añadimos la mitad del número requerido, el resultado será 30. Supongamos que tal número es $=x$. Su mitad multiplicada por su tercio dará $\frac{1}{6}xx$, así que $\frac{1}{6}xx+\frac{1}{2}x=30$. Multiplicando por 6 tenemos $xx+3x=180$ o $xx=-3x+180$, lo que da $x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+180}=-\frac{3}{2}\pm\frac{27}{2}$. Consecuentemente, x es $=12$ o $=-15$.

566. *Cuestión IV*. Encontrar dos números, uno siendo el doble que el otro, tales que, si añadimos su suma a su producto, obtengamos 90. Sea uno de los números $=x$. Entonces el otro será $=2x$, su producto $=2xx$, y si a esto añadimos $3x$, o su suma, la nueva suma debe dar 90. Así que $2xx+3x=90; 2xx=90-3x; xx=-\frac{3}{2}+45$, de donde obtenemos que $x=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+45}=-\frac{3}{4}\pm\frac{27}{4}$. Consecuentemente, $x=6$ o $=-7\frac{1}{2}$.

567. *Cuestión V*. Un vendedor de caballos, quien compró uno por un cierto número de coronas, lo vende de nuevo por 119 coronas, y su ganancia es tanto porcentaje como le costó el caballo. ¿Cuánto pagó por él? Supongamos que el caballo costó *x* coronas. Entonces, como el vendedor de caballos gana *x* porcentaje, diremos que, si 100 dan el beneficio *x*, ¿cuánto da *x*? La respuesta es $\frac{xx}{100}$. Así pues, ha ganado $\frac{xx}{100}$ y originalmente el caballo le costó *x* coronas; entonces debe haberlo vendido por $x+\frac{xx}{100}$, y por tanto $x+\frac{xx}{100}=119$. Sustrayendo *x* tenemos $\frac{xx}{100}=-x+119$, y multiplicando por 100 tenemos $xx=-100x+11900$. Aplicando nuestra regla descubrimos que $x=-50\pm\sqrt{2500+11900}=-50\pm\sqrt{14400}=-50\pm120$.

Respuesta. El caballo costó 70 coronas, y como el vendedor ganó 70 por ciento cuando lo vendió de nuevo, la ganancia debe haber sido de 49 coronas. El caballo, por tanto, debió haberse vendido de nuevo por $70+49$ coronas, esto es, por 119 coronas.

568. *Cuestión VI*. Una persona compra un cierto número de piezas de ropa. Por la primera pieza paga 2 coronas; por la segunda, 4; por la tercera, 6, y así siempre 2 coronas más por cada nueva pieza de ropa. Todas las piezas juntas le costaron 110 coronas. ¿Cuántas piezas compró?

Sea $=x$ el número buscado. Dada la naturaleza de la cuestión, el comprador pagó las distintas piezas de ropa de la siguiente manera:

por la 1, 2, 3, 4, 5,…, x pieza

paga 2, 4, 6, 8, 10,…, $2x$ coronas.

Se requiere, por lo tanto, encontrar la suma de la progresión aritmética $2+4+6+8+10+...+2x$, consistente en x términos, y tal que de ella podamos deducir el precio de todas las piezas de ropa tomadas juntas. La regla que ya ofrecimos para esta operación requiere que sumemos el último término y el primero, esto es, $2x+2$. Si multiplicamos esta suma por x, el número de términos, el producto será $2xx+2x$, y si, por último, dividimos esto entre 2, la diferencia, el cociente será $xx+x$, que es la suma de la progresión. Así que tenemos que $xx+x=100$; por tanto, $xx=-x+110$ y $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+110}=-\frac{1}{2}+\frac{21}{2}=10$.

Respuesta. El número de piezas de ropa es 10.

569. *Cuestión VII*. Una persona compró varias piezas de ropa por 180 coronas. Si por la misma suma hubiese recibido 3 piezas más, habría pagado tres coronas menos por cada pieza. ¿Cuántas piezas compró?

Hagamos que el número buscado sea $=x$. Entonces cada pieza le habrá costado $\frac{180}{x}$ coronas. Ahora, si el comprador hubiera tenido $x+3$ piezas por 180 coronas, cada pieza le habría costado $\frac{180}{x+3}$ coronas, y como este precio es menor que el precio real por tres coronas, tenemos la ecuación $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$. Multiplicando por x tenemos

$\frac{180x}{x+3}=180-3x$; dividiendo entre 3 tenemos $\frac{60x}{x+3}=60-x$, y de nuevo multiplicando por $x+3$ tenemos $60x=180+57x-xx$. Añadiendo *xx* tendremos que $xx+60x=180+57x$, y sustrayendo $60x$ tendremos que $xx=-3x+180$. En consecuencia, nuestra regla nos da que $x=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}+180}$ o que $x=-\frac{3}{2}+\frac{27}{2}=12$.

Respuesta. Por 180 coronas compró 12 piezas de ropa a 15 coronas la pieza, y si hubiese recibido 3 piezas más, a saber, 15 piezas por 180 coronas, cada pieza le habría costado solamente 12 coronas, esto es, 3 coronas menos.

570. *Cuestión VIII*. Dos comerciantes se asocian con un capital de 100 coronas; uno deja su dinero en la asociación por tres meses, el otro el suyo por dos meses, y cada uno obtiene 99 coronas de capital y ganancia. ¿Qué proporción del capital proporcionó cada cual? Supongamos que el primer socio contribuyó con *x* coronas; entonces el otro lo habrá hecho con $100-x$. Ahora, el primer socio recibiendo 99 coronas, su ganancia es $99-x$ que ha ganado en tres meses junto con *x*, y como el segundo también recibe 99 coronas, su ganancia es $x-1$, que ha ganado en dos meses junto con $100-x$. También es evidente que la ganancia de este segundo socio habría sido $\frac{3x-3}{2}$ si hubiese permanecido tres meses en la asociación. Ahora bien, como las ganancias obtenidas en el mismo tiempo están en proporción con las contribuciones principales, tenemos la proporción $x:99-x=100-x:\frac{3x-3}{2}$.

La igualdad del producto de los [términos] extremos con la de los [términos] medios nos da la ecuación $\frac{3xx-3x}{2}=9900-199x+xx$; multiplicando esto por 2 tenemos $3xx-3x=19800-398x+2xx$; sustrayendo $2xx$ tenemos $xx-3x=19800-398x$, y añadiendo $3x$ tenemos $xx=19800-395x$.

Por lo tanto, por nuestra regla tenemos que $x=-\frac{395}{2}+\sqrt{\frac{156025}{4}+\frac{79200}{4}}=-\frac{395}{2}+\frac{458}{2}=\frac{90}{2}=45$.

Respuesta. El primer socio contribuyó con 45 coronas y el segundo con 55. El primero, habiendo ganado 54 coronas en tres meses, habría ganado 18 coronas en un mes, y

el segundo, habiendo ganado 44 coronas en dos meses, habría ganado 22 coronas en un mes. Estas ganancias concuerdan, porque si con 45 coronas se ganan 18 coronas en un mes, con 55 coronas se ganarán 22 coronas en el mismo tiempo.

571. *Cuestión IX*. Dos niñas llevan 100 huevos al mercado. Una tenía más que la otra, pero la suma que ambas recibieron por los huevos fue la misma. La primera le dice a la segunda: "Si yo hubiese tenido tus huevos, habría recibido 15 sous." Y la segunda le responde: "Si yo hubiese tenido los tuyos, habría recibido $6\frac{2}{3}$ sous." ¿Cuántos huevos llevaba cada cual?

Supongamos que la primera tenía x huevos; entonces la segunda habrá tenido $100-x$. Como la primera habría vendido $100-x$ huevos por 15 sous, tenemos la proporción $100-x:15=x...$ es a $\frac{15x}{100-x}$. Como la segunda habría vendido x huevos por $6\frac{2}{3}$ sous, encontramos cuánto recibió por $100-x$ huevos al decir que $x:\frac{20}{3}=100-x...$ es a $\frac{200-20x}{3x}$. Ya que ambas niñas recibieron el mismo dinero, tenemos la ecuación $\frac{15x}{100-x}=\frac{2000-20x}{3x}$, que se vuelve $25xx=200000-4000x$, y por último $xx=-160x+8000$, de donde obtenemos que $x=-80+\sqrt{6400+8000}=-80+120=40$.

Respuesta. La primera niña cargaba 40 huevos, la segunda 60, y cada una recibió 10 sous.

572. *Cuestión X*. Dos comerciantes venden entre sí una cierta cantidad de seda. El segundo vende 3 varas [de seda] más que el primero, y entre ambos recibieron 35 coronas. El primero le dice al segundo: "Yo debí haber recibido 24 coronas por tu seda.", y el segundo le responde: "Y yo debí haber recibido 12 coronas y media por la tuya." ¿Cuántas varas tenía cada cual?

Supongamos que el primero tenía x varas; entonces el segundo debió haber tenido $x+3$ varas. Ahora, ya que el primero habría vendido $x+3$ varas por 24 coronas, tuvo que haber recibido $\frac{24x}{x+3}$ coronas por sus x varas. Y con respecto al segundo, ya que habría

vendido x varas por $12\frac{1}{2}$ coronas, habría tenido que vender sus $x+3$ varas por $\frac{25x+75}{2x}=35$ coronas.

Esta ecuación se vuelve $xx=20-75$, y por tanto tenemos que $x=10\pm\sqrt{100-75}=10\pm5$.

Respuesta. La cuestión admite dos soluciones. De acuerdo con la primera, el primer comerciante tuvo 15 varas y el segundo 18, y como aquél habría vendido 18 varas por 24 coronas, habría vendido sus 15 varas por 20 coronas; el segundo, quien habría vendido 15 varas por 12 coronas y media, tuvo que haber vendido sus 18 varas por 15 coronas, así que realmente recibieron 35 coronas por su mercancía.

De acuerdo con la segunda solución, el primer comerciante tenía 5 varas y el otro 8; así que, como el primero habría vendido 8 varas por 24 coronas, tuvo que haber recibido 15 coronas por sus 5 varas, y como el segundo habría vendido 5 varas por 12 coronas y media, sus 8 varas tuvieron que haberle dado 20 coronas. La suma es, como antes, 35 coronas.

CAPÍTULO VII

DE LA NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

573. Lo que hemos dicho basta para mostrar que las ecuaciones de segundo grado admiten dos soluciones, y esta propiedad debe examinarse desde cada punto de vista, porque la naturaleza de las ecuaciones de un grado superior se verá así muy ilustrada. Es por esto que debemos volver a trazar, con mayor atención, las razones que permiten que una ecuación de segundo grado sea capaz de una doble solución, ya que indudablemente expondrán una propiedad esencial de tales ecuaciones.

574. Ya hemos visto, es cierto, que esta doble solución surge de la circunstancia de que la raíz cuadrada de cualquier número puede tomarse positiva o negativamente. Sin embargo, ya que este principio no se aplica fácilmente a ecuaciones de grados superiores, es apropiado ilustrarlo con un análisis distinto. Tomando, por ejemplo, la ecuación cuadrática $xx=12x-35$, ofreceremos una nueva razón para que esta ecuación sea

resoluble de dos maneras al admitir, para *x*, los valores 5 y 7, ambos de los cuales satisfacen los términos de la ecuación.

575. Para este propósito lo más conveniente es comenzar con transponer los términos de la ecuación de tal forma que uno de los lados se vuelva 0; entonces esta ecuación toma la forma $xx-12x+35=0$, y ahora requerimos encontrar un número tal que, si lo sustituimos por *x*, la cantidad $xx-12x+35$ realmente pueda ser igual a nada. Después de esto, tendremos que mostrar cómo puede hacerse esto de dos maneras.

576. Ahora todo consiste en mostrar claramente que *una cantidad de la forma* $xx-12x+35$ *puede considerarse como el producto de dos factores*; así, de hecho, la cantidad de la que hablamos está compuesta de los dos factores $(x-5)\times(x-7)$. Esto porque, como esta cantidad debe volverse 0, también tenemos que tener el producto $(x-5)\times(x-7)=0$; pero *un producto, compuesto de cualquier número de factores, se vuelve* $=0$ *únicamente cuando uno de tales factores es reducido a 0*. Este es un principio fundamental al cual debemos prestar una atención particular, especialmente cuando tratemos con ecuaciones de varios grados.

577. Puede, por tanto, comprenderse fácilmente que *el producto* $(x-5)\times(x-7)$ *puede volverse 0 de dos maneras: una, cuando el primer factor* $x-5=0$*; la otra, cuando el segundo factor* $x-7=0$. *En el primer caso* $x=5$ *y en el segundo* $x=7$. La razón, entonces, de por qué tal ecuación $xx-12x+35=0$ admite dos soluciones es bastante evidente; esto es, por qué podemos asignar dos valores de *x* ambos de los cuales satisfacen igualmente los términos de la ecuación. Este principio fundamental consiste en esto: que la cantidad $xx-12x+35$ puede ser representada por el producto de dos factores.

578. Las mismas circunstancias se encuentran en todas las ecuaciones de segundo grado, porque, una vez llevados todos los términos a un lado, siempre encontramos una ecuación de la forma $xx-ax+b=0$, y esta fórmula siempre puede considerarse como el producto de dos factores que representaremos por $(x-p)\times(x-q)$ sin preocuparnos por qué números representen las letras *p* y *q*. Ahora, ya que este producto debe ser $=0$, dada la naturaleza de nuestra ecuación es evidente que esto puede suceder de dos maneras; en primer lugar, cuando $x=p$, y en segundo lugar, cuando $x=q$, y éstos son los dos valores de *x* que satisfacen los términos de la ecuación.

579. Consideremos ahora la naturaleza de estos dos factores con el fin de que la multiplicación de uno por el otro pueda producir $xx - ax + b$ de manera exacta. Al multiplicarlos en realidad, tenemos $xx - (p+q)x + pq$, que debe de ser lo mismo que $xx - ax + b$, y entonces tenemos, evidentemente, que $p + q = a$ y que $pq = b$. Así que de esto hemos deducido una propiedad muy singular, a saber, que *en toda ecuación de la forma* $xx - ax + b = 0$*, los dos valores de x son tales que su suma es igual a* a *y su producto igual a* b*, de donde se sigue que, si conocemos uno de los valores, el otro puede encontrarse fácilmente*.

580. Hemos considerado el caso en el que los dos valores de *x* son positivos, y que requiere que el segundo término de la ecuación tenga el signo — y que el tercero tenga el signo +. Ahora consideremos los casos en los que uno o ambos valores de *x* se vuelven negativos. El primer caso tiene lugar cuando los dos factores de la ecuación dan un producto de la forma $(x - p) \times (x + q)$, porque entonces los dos valores de *x* son $x = p$ y $x = -q$, y la propia ecuación se vuelve $xx + (q - p)x - pq = 0$. El segundo término tiene el signo + cuando *q* es mayor que *p* y el signo — cuando *q* es menor que *p*; el tercer término siempre es negativo.

El segundo caso, en el que ambos valores de *x* son negativos, ocurre cuando los dos factores son $(x + p) \times (x + q)$, porque entonces tendremos que $x = -p$ y $x = -q$ y la propia ecuación se vuelve $xx + (p+q)x + pq = 0$, en donde tanto el segundo como el tercer término están afectados por el signo +.

581. Consecuentemente, los signos del segundo y del tercer término nos muestran la naturaleza de las raíces de cualquier ecuación de segundo grado. Sea $x...ax...b = 0$ la ecuación; si el segundo y el tercer término tienen el signo +, los dos valores de *x* son negativos; si el segundo término tiene el signo — y el tercero tiene +, ambos valores son positivos; por último, si el tercer término también tiene el signo —, entonces uno de los valores es positivo. Pero en todos los casos, sin importar cuáles sean, el segundo término contiene la suma de los dos valores y el tercer término contiene su producto.

582. Después de lo dicho, será muy fácil formar ecuaciones de segundo grado conteniendo cualesquiera dos valores. Requiérase, por ejemplo, una ecuación tal que uno de los valores de *x* pueda ser 7 y el otro -3. Primero formamos las ecuaciones simples $x = 7$

y $x=-3$; después, $x-7=0$ y $x+3=0$, que nos dan, de esta manera, los factores de la ecuación requerida, que consecuentemente se vuelve $xx-4x-21=0$. Aplicando la regla expuesta arriba, encontramos los dos valores de *x*, porque si $xx=4x+21$, tenemos que $x=2\pm\sqrt{25}=2\pm5$, es decir, que $x=7$ o $x=-3$.

583. También puede ser el caso que los valores de *x* sean iguales. Búsquese, por ejemplo, una ecuación en la que ambos valores puedan ser $=5$. Los dos factores serán $(x-5)\times(x-5)$ y la ecuación buscada será $xx-10x+25=0$. En esta ecuación, *x* parece tener sólo un valor, pero eso es porque encontramos dos veces que *x* es $=5$, tal como muestra el método común de resolución. Así pues, tenemos que $xx=10x-25$, y por tanto que $x=5\pm\sqrt{0}=5\pm0$, esto es, *x* es $=5$ de dos maneras.

584. A veces ocurre un caso muy singular en el que ambos valores de *x* se vuelven imaginarios o imposibles, y entonces es totalmente imposible asignar cualquier valor para *x* que satisfaga los términos de la ecuación. Propóngase, por ejemplo, dividir al número 10 en dos partes tales que su producto pueda ser 30. Si a una de tales partes la llamamos *x*, la otra será $=10-x$ y su producto será $10x-xx=30$. Por consiguiente, $xx=10x-30$ y $x=5\pm\sqrt{-5}$ que, *siendo un número imaginario, muestra que la cuestión es imposible*.

585. Resulta muy importante, entonces, descubrir alguna señal por medio de la cual podamos saber de inmediato si una ecuación de segundo grado es posible o no.

Retomemos la ecuación general $ax-xx+b=0$. Entonces tendremos que $xx=ax-b$ y que $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}aa-b}$. Esto muestra que, si *b* es mayor que $\frac{1}{4}aa$, o $4b$ mayor que *aa*, los dos valores de *x* siempre son imaginarios, ya que se requeriría extraer la raíz cuadrada de una cantidad negativa; por el contrario, si *b* es menor que $\frac{1}{4}aa$, o incluso menor que 0, esto es, si es un número negativo, ambos valores serán positivos o reales. Pero, ya sean reales o imaginarios, no es menos cierto que siguen siendo expresables y que siempre tendrán la propiedad de que su suma es $=a$ y su producto $=b$. En la ecuación $xx-6x+10=0$, por ejemplo, la suma de los dos valores de *x* debe ser $=6$ y su producto $=10$; encontramos que I. $x=3+\sqrt{-1}$ y que II. $x=3-\sqrt{-1}$, cantidades cuya suma es $=6$ y cuyo producto es $=10$.

586. Las expresiones recién encontradas pueden ser representadas de una manera más general y con el fin de ser aplicadas a ecuaciones de la forma $fxx \pm gx + h = 0$, porque esta ecuación da $xx = \pm\frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$ y $x = \pm\frac{g}{2f} \pm \sqrt{\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}}$ o $x = \frac{\pm g \pm \sqrt{gg - 4fh}}{2f}$, de donde concluimos que los dos valores son imaginarios, y consecuentemente la ecuación es imposible cuando $4fh$ es mayor que *gg*, esto es, cuando, en la ecuación $fxx - gx + h = 0$, cuatro veces el producto del primero y del último término excede al cuadrado del segundo término, porque el producto del primero y del último término, tomado cuatro veces, es $4fhxx$ y el cuadrado del término de en medio es *ggxx*; ahora, si $4fhxx$ es mayor que *ggxx*, $4fh$ también es mayor que *gg*, y en tal caso la ecuación es evidentemente imposible. En todos los otros casos la ecuación es posible y podemos asignar los dos valores reales de *x*. Es verdad que a veces son irracionales, pero ya hemos visto que en tales casos siempre podemos encontrarlos de manera aproximada, mientras que ninguna aproximación puede tener lugar con respecto a las expresiones imaginarias como $\sqrt{-5}$, porque 100 está tan lejos de ser el valor de tal raíz como lo está 1 o cualquier otro número.

587. También debemos notar que *cualquier cantidad de segundo grado,* $xx \pm ax \pm b$, *siempre debe ser resoluble en dos factores* como $(x \pm p) \times (x \pm q)$. Esto porque, si tomamos tres factores como éstos, llegaremos a una cantidad de tercer grado, y si tomamos sólo uno, no pasaremos del primer grado. Por lo tanto, es cierto que *toda ecuación de segundo grado necesariamente contiene dos valores de x y que nunca puede tener más o menos*.

588. Ya hemos visto que, cuando encontramos los dos factores, también conocemos los dos valores de *x*, ya que cada factor da uno de tales valores cuando se supone que es $= 0$. Lo inverso también es cierto, esto es, que cuando hemos encontrado un valor de *x*, también conocemos uno de los factores de la ecuación, porque si $x = p$ representa uno de los valores de *x* en cualquier ecuación de segundo grado, $x - p$ es uno de los factores de tal ecuación; es decir, una vez llevados todos los términos a un lado, la ecuación es divisible entre $x - p$, además de que el cociente expresa al otro factor.

589. Para ilustrar lo recién dicho, consideremos la ecuación $xx + 4x - 21 = 0$, en donde sabemos que $x = 3$ es uno de los valores de *x* porque $(3 \times 3) + (4 \times 3) - 21 = 0$; esto

muestra que $x-3$ es uno de los factores de la ecuación o que $xx+4x-21$ es divisible entre $x-3$, lo que prueba la división real. Así,

$$
\begin{aligned}
&x-3)xx+4x-21(x+7\\
&xx-3x\\
&7x-21\\
&7x-21\\
&0.
\end{aligned}
$$

De tal manera que el otro factor es $x+7$, y nuestra ecuación está representada por el producto $(x-3)\times(x+7)=0$, de donde inmediatamente se siguen los dos valores de *x*, el primer factor dando $x=3$ y el segundo $x=-7$.